1. Метод замены переменной (Сведение к квадратному)

Применяется, если уравнение содержит одну тригонометрическую функцию одного аргумента.
Алгоритм: Вводится замена $t = \sin x$ или $t = \cos x$.

ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ: Для $t = \sin x$ или $t = \cos x$ ВСЕГДА пишем $-1 \le t \le 1$ (или $|t| \le 1$).
Корни t, выходящие за пределы $[-1; 1]$ (например, $t = 2$ или $t = -1.5$), не имеют решений!

Пример с заменяемой функцией:

Решить уравнение: $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

1) Заменяем $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$

2) Пусть $t = \sin x$, где $-1 \le t \le 1$. Получаем: $2t^2 + 5t - 3 = 0$

3) Корни: $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -3$ (не удовл. $|t| \le 1$).

4) Обратная замена: $\sin x = \frac{1}{2}$:

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Однородные тригонометрические уравнения

1-й степени: $a \sin x + b \cos x = 0$

1) Делим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$:

$a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + b \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = -\frac{b}{a}$

2) **Обоснование ($\cos x \neq 0$):** Если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что противоречит $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2-й степени: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

1) Делим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$:

$a \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \cdot \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0$

2) Сводится к квадратному относительно $t = \mathrm{tg}\,x$ (без ограничений на t).

Пример однородного уравнения 2-й степени (ФИПИ):

Решить уравнение: $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

1) Так как $\cos x = 0$ не является корнем уравнения (если $\cos x = 0$, то $2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, что невозможно), разделим обе части на $\cos^2 x \neq 0$:

$2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$

2) Пусть $t = \mathrm{tg}\,x$. Получаем квадратное уравнение: $2t^2 - 3t + 1 = 0$

3) Корни: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$

4) Обратная замена:

- $\mathrm{tg}\,x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

3. Метод разложения на множители (Вынесение, группировка)

Главное правило: Свести уравнение к виду $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ или $g(x) = 0$.

Пример с двойным углом и группировкой:

Решить уравнение: $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$

1) Раскрываем синус двойного угла: $2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$

2) Выносим общий множитель $2\cos x$: $2\cos x\,(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$

3) Распадается на два уравнения: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ **или** $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

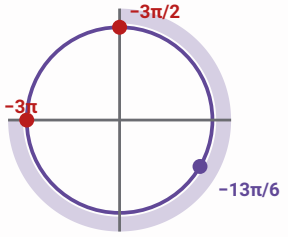
МЕТОДЫ ОТБОРА КОРНЕЙ (ПУНКТ Б)

Полное руководство по отбору корней на окружности и с помощью неравенств

1. Отбор на тригонометрической окружности (Основной метод)

Самый наглядный и быстрый метод для пункта Б. Требует точного соблюдения структуры оформления!

1. **Оси и окружность:** Нарисуй единичную окружность, подпиши оси X (cos) и Y (sin).
2. **Концы отрезка [A; B]:** Отмети точки начала A и конца B.
3. **Заштрихуй дугу:** Штрихуй **ОБЯЗАТЕЛЬНО от A к B против часовой стрелки** (в сторону увеличения угла)!
4. **Точки серии:** Нанеси точки, входящие в заштрихованную область.
5. **Расчет значений:** Шагай от реперных точек (π, 2π, 3π...).



Пример подсчета: $-2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

2. Алгебраический метод (Через двойное неравенство)

Идеален, когда отрезок очень большой (например, $[5\pi;\ 12\pi]$) или когда тяжело нарисовать угол на окружности.

Пример отбора серии $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ на отрезке $[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}]$:

1) Составляем двойное неравенство: $-3\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

2) Делим все части на π: $-3 \le -\frac{1}{6} + 2k \le -\frac{3}{2}$

3) Прибавляем $\frac{1}{6}$: $-3 + \frac{1}{6} \le 2k \le -\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{17}{6} \le 2k \le -\frac{8}{6}$

4) Делим на 2: $-\frac{17}{12} \le k \le -\frac{8}{12} \Leftrightarrow -1.41... \le k \le -0.66...$

5) Так как $k \in \mathbb{Z}$, единственное целое значение: $\boldsymbol{k = -1}$.

6) Подставляем $k = -1$ в серию: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{13\pi}{6}$.

3. Работа с арксинусами и иррациональными отрезками

Сравнение *arcsin* и чисел:

Если корень серии равен $x = arcsin(\frac{1}{3})$, а отрезок равен $[0;\ 1]$:

• Оцениваем: $0 < \frac{1}{3} < sin(1)$ (т.к. $1\ рад \approx 57°, sin\ 57° > sin\ 30° = 0.5$).

• Значит, $arcsin(\frac{1}{3}) \in [0;\ 1]$.

Как НЕ НАДО оформлять пункт Б:

• Нельзя просто перечислять ответ без объяснения («на окружности видно» — **0 баллов**).

• При отборе перебором k ОБЯЗАТЕЛЬНО показать границы (показать соседнее k, которое не подошло).

Задача 1 (из открытого банка ФИПИ): Формула косинуса двойного угла и группировка

Условие: а) Решите уравнение $2cos^3x - cos\,2x - 2cos\,x + 1 = 0$. б) Найдите все корни на отрезке $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

Решение пункта А:

1) Заменяем $cos\,2x = 2cos^2x - 1$:

$2cos^3x - (2cos^2x - 1) - 2cos\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2cos^3x - 2cos^2x - 2cos\,x + 2 = 0$

2) Делим на 2 и группируем: $cos^2x(cos\,x - 1) - 1(cos\,x - 1) = 0$

3) Раскладываем: $(cos\,x - 1)(cos^2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (cos\,x - 1)^2(cos\,x + 1) = 0$

4) Получаем серии: $cos\,x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ или $cos\,x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Объединяя обе серии, получаем: $\boldsymbol{x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$.

Решение пункта Б (Отбор на окружности):

Нанесем дугу $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$ и серию решений $x = \pi k$:

• Точка 3π входит в отрезок (соответствует $k = 3$).

• Точка 4π входит в отрезок (соответствует $k = 4$).

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi;\ 4\pi$.

Задача 2 (из открытого банка ФИПИ): Дробное уравнение с ОДЗ под корнем

Условие: а) Решите уравнение $\frac{2sin^2x - 3sin\,x + 1}{\sqrt{-cos\,x}} = 0$. б) Укажите корни на отрезке $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

Решение пункта А:

1) **ОДЗ:** Подкоренное выражение строго больше нуля: $-cos\,x > 0 \Leftrightarrow cos\,x < 0$ (II и III четверти).

2) Приравниваем числитель к нулю: $2sin^2x - 3sin\,x + 1 = 0$.

Замена $t = sin\,x$ ($|t| \le 1$) $\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}$.

• Если $sin\,x = 1$, то $cos\,x = 0$ (не удовл. ОДЗ $cos\,x < 0$).

• Если $sin\,x = \frac{1}{2}$, то серии: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ (I четв., $cos\,x > 0$ — не подходит) и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ (II четв., $cos\,x < 0$ — **ПОДХОДИТ**).

Решение пункта Б:

Для серии $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ единственный корень при $k = 0$: $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{6}$.

Критерии проверки Задания №13 экспертами ЕГЭ

Баллы	Критерии оценивания ФИПИ
2 балла	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах (А и Б).
1 балл	Обоснованно получен верный ответ в п. А; ИЛИ с верным алгоритмом получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но с ней пройдены все шаги п. А и Б.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев выше.

Совет: самые частые причины 0 баллов — ошибки в формулах, деление на 0, нет аргументации отбора.