Практика по логарифмам

Часть 1: задания с логарифмами

Часть 2: ОДЗ, уравнения и неравенства

Содержание

Часть 1. Задания с логарифмами 2
1 Блок A. Преобразование выражений 2
2 Блок B. Разные основания 4
3 Блок C. Уравнения 6
4 Блок D. Замена переменной 10
5 Блок E. Комбинированные задания 12
Часть 2. ОДЗ, уравнения и неравенства 14
6 Ограничения на логарифмы (ОДЗ) 14
7 Блок F. Найти область допустимых значений 15
8 Блок G. Уравнения с ОДЗ-ловушками 17
9 Блок H. Задания второй части 20
10 Блок I. Задания в формате ЕГЭ 23
11 Блок J. Логарифмические неравенства 25
12 Блок J1. Сумма и разность 25
13 Блок J2. Замена переменной 27
14 Блок J3. Метод рационализации 31
15 Блок J4. Логарифм в основании 34
16 Блок J5. Сложные неравенства 38
17 Блок K. Системы уравнений 41
18 Блок L. Показательно-логарифмические уравнения 44
19 Блок M. Отбор корней с тригонометрией 47
20 Блок N. Показательно-логарифмические неравенства 49
21 Блок O. Минимум с параметром 52
Как пользоваться 54

Часть 1. Задания с логарифмами

1. Блок А. Преобразование выражений

Задания в формате ЕГЭ

1. $\log_2 12 - \log_2 3 + \log_2 8$ — Ответ: 5
2. $\log_3 45 - \log_3 5 + \log_3 9$ — Ответ: 4
3. $\log_6 4 + \log_6 9 - \log_6 1$ — Ответ: 2
4. $2\log_7 3 + \log_7 \dfrac{49}{9}$ — Ответ: 2
5. $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2}$ — Ответ: 2

Составленные задания

6. $\log_5 50 - \log_5 2 + \log_5 25$ — Ответ: 4
7. $\log_2 40 - \log_2 5 + \log_2 4$ — Ответ: 5
8. $\log_4 8 + \log_4 2 - \log_4 1$ — Ответ: 2
9. $\log_9 27 + \log_9 3$ — Ответ: 2
10. $\log_3 \sqrt[3]{81} - \log_3 \sqrt[3]{3}$ — Ответ: 1
11. $\log_7 98 - \log_7 2 + \log_7 1$ — Ответ: 2
12. $\log_2 24 - \log_2 3 + \log_2 16$ — Ответ: 7

Решения А.

№1. **ОДЗ:** все аргументы положительны: $12 > 0$, $3 > 0$, $8 > 0$. Основание $2 > 0$, $2 \neq 1$. Значит:

$$\log_2 \frac{12}{3} + \log_2 8 = \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5.$$

№2. **ОДЗ:** $45 > 0$, $5 > 0$, $9 > 0$; основание $3 > 0$, $3 \neq 1$. Тогда:

$$\log_3 \frac{45}{5} + \log_3 9 = \log_3 9 + \log_3 9 = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

№3. **ОДЗ:** $4 > 0$, $9 > 0$, $1 > 0$; основание $6 > 0$, $6 \neq 1$. Тогда:

$$\log_6(4 \cdot 9) - \log_6 1 = \log_6 36 - \log_6 1 = \log_6 \frac{36}{1} = 2.$$

№4. **ОДЗ:** $3 > 0$, $\frac{49}{9} > 0$; основание $7 > 0$, $7 \neq 1$. Тогда:

$$2\log_7 3 + \log_7 \frac{49}{9} = \log_7 9 + \log_7 \frac{49}{9} = \log_7 \left(9 \cdot \frac{49}{9}\right) = \log_7 49 = 2.$$

№5. **ОДЗ:** $8 > 0$, $2 > 0$; основание $2 > 0$, $2 \neq 1$. Тогда:

$$\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2} = \log_2(\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{16} = \log_2 4 = 2.$$

№6. **ОДЗ:** $50 > 0$, $2 > 0$, $25 > 0$; основание $5 > 0$, $5 \neq 1$. Тогда:

$$\log_5 50 - \log_5 2 + \log_5 25 = \log_5 \frac{50}{2} + \log_5 25 = \log_5 25 + \log_5 25 = 2 \cdot 2 = 4.$$

№7. **ОДЗ:** $40 > 0$, $5 > 0$, $4 > 0$; основание $2 > 0$, $2 \neq 1$. Тогда:

$$\log_2 \frac{40}{5} + \log_2 4 = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5.$$

№8. **ОДЗ:** $8 > 0$, $2 > 0$, $1 > 0$; основание $4 > 0$, $4 \neq 1$. Тогда:

$$\log_4(8 \cdot 2) - \log_4 1 = \log_4 16 - 0 = 2.$$

№9. **ОДЗ:** $27 > 0$, $3 > 0$; основание $9 > 0$, $9 \neq 1$. Тогда:

$$\log_9(27 \cdot 3) = \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2.$$

№10. **ОДЗ:** $81 > 0$, $3 > 0$; основание $3 > 0$, $3 \neq 1$. Тогда:

$$\log_3 \sqrt[3]{81} - \log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 \sqrt[3]{27} = \log_3 3 = 1.$$

№11. **ОДЗ:** $98 > 0$, $2 > 0$, $1 > 0$; основание $7 > 0$, $7 \neq 1$. Тогда:

$$\log_7 \frac{98}{2} + \log_7 1 = \log_7 49 + 0 = 2.$$

№12. **ОДЗ:** $24 > 0$, $3 > 0$, $16 > 0$; основание $2 > 0$, $2 \neq 1$. Тогда:

$$\log_2 \frac{24}{3} + \log_2 16 = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7.$$

2. Блок B. Разные основания

Задания в формате ЕГЭ

13. $\log_2 3 \cdot \log_3 16$ — Ответ: 4

14. $\log_5 7 \cdot \log_7 125$ — Ответ: 3

15. $\log_3 4 \cdot \log_4 27$ — Ответ: 3

16. $\log_2 5 \cdot \log_5 8$ — Ответ: 3

17. $\dfrac{\log_7 64}{\log_7 8}$ — Ответ: 2

18. $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$ — Ответ: 2

19. $3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5}$ — Ответ: 12

Составленные задания

20. $\dfrac{\log_5 81}{\log_5 3}$ — Ответ: 4

21. $\log_4 9 \cdot \log_3 8$ — Ответ: 3

22. $\log_9 5 \cdot \log_5 81$ — Ответ: 2

23. $5^{\log_5 12} - 2^{\log_2 3}$ — Ответ: 9

24. $\log_2 7 \cdot \log_7 32$ — Ответ: 5

25. $\log_3 5 \cdot \log_5 27$ — Ответ: 3

26. $\dfrac{\log_2 125}{\log_2 5}$ — Ответ: 3

Решения B.

№13. ОДЗ: $3 > 0$, $16 > 0$; основания $2, 3 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 2: $\log_3 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 3}$. Тогда:

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 3} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$$

№14. ОДЗ: $7 > 0$, $125 > 0$; основания $5, 7 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 5:

$$\log_5 7 \cdot \frac{\log_5 125}{\log_5 7} = \log_5 125 = 3.$$

№15. ОДЗ: $4 > 0$, $27 > 0$; основания $3, 4 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 3:

$$\log_3 4 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 4} = \log_3 27 = 3.$$

№16. ОДЗ: $5 > 0$, $8 > 0$; основания $2, 5 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 2:

$$\log_2 5 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} = \log_2 8 = 3.$$

№17. ОДЗ: $64 > 0$, $8 > 0$; основание $7 > 0$, $7 \neq 1$; $\log_7 8 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{\log_7 64}{\log_7 8} = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2.$$

№18. **ОДЗ:** $25 > 0$, $5 > 0$; основание $3 > 0$, $3 \neq 1$; $\log_3 5 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2.$$

№19. **ОДЗ:** $7 > 0$, $5 > 0$; основания $3, 2 > 0$, $\neq 1$. По основному логарифмическому тождеству $a^{\log_a b} = b$:

$$3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 7 + 5 = 12.$$

№20. **ОДЗ:** $81 > 0$, $3 > 0$; основание $5 > 0$, $5 \neq 1$; $\log_5 3 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{\log_5 81}{\log_5 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

№21. **ОДЗ:** $9 > 0$, $8 > 0$; основания $4, 3 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 3:

$$\log_4 9 \cdot \log_3 8 = \frac{\log_3 9}{\log_3 4} \cdot \log_3 8 = \frac{2}{2\log_3 2} \cdot 3\log_3 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

№22. **ОДЗ:** $5 > 0$, $81 > 0$; основания $9, 5 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 9:

$$\log_9 5 \cdot \frac{\log_9 81}{\log_9 5} = \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2.$$

№23. **ОДЗ:** $12 > 0$, $3 > 0$; основания $5, 2 > 0$, $\neq 1$. Тогда:

$$5^{\log_5 12} - 2^{\log_2 3} = 12 - 3 = 9.$$

№24. **ОДЗ:** $7 > 0$, $32 > 0$; основания $2, 7 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 2:

$$\log_2 7 \cdot \frac{\log_2 32}{\log_2 7} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5.$$

№25. **ОДЗ:** $5 > 0$, $27 > 0$; основания $3, 5 > 0$, $\neq 1$. Перейдём к основанию 3:

$$\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5} = \log_3 27 = 3.$$

№26. **ОДЗ:** $125 > 0$, $5 > 0$; основание $2 > 0$, $2 \neq 1$; $\log_2 5 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{\log_2 125}{\log_2 5} = \log_5 125 = 3.$$

3. Блок C. Уравнения

Задания в формате ЕГЭ

27. $\log_2(x+3)+\log_2(x-3)=4$ — Ответ: 5

28. $\log_3(x+1)+\log_3(x-5)=3$ — Ответ: 8

29. $\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=\log_5 6$ — Ответ: 4

30. $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ — Ответ: 16

31. $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=1$ — Ответ: 3

32. $\log_4(x-4)=3$ ФИПИ, код 17CF80 — Ответ: 68

33. $\log_7(1-x)=\log_7 5$ ФИПИ, код 586EF2 — Ответ: -4

34. $\log_5(8-x)=\log_5 2$ ФИПИ, код 91CD43 — Ответ: 6

35. $\log_3(15-x)=\log_3 7$ ФИПИ, код BF9CD9 — Ответ: 8

36. $\log_3(x+4)=\log_3 16$ ФИПИ, код E4F70F — Ответ: 12

37. $\log_2(x-2)=\log_2 11$ ФИПИ, код 517970 — Ответ: 13

Составленные задания

38. $\log_2(x^2-3x)=\log_2(2x-4)$ — Ответ: 4

39. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{2}$ — Ответ: 27

40. $\log_5(x+2)-\log_5(x-2)=1$ — Ответ: 3

41. $\log_4(x^2-4x)=\log_4(2x-8)$ — Ответ: нет решений

42. $\log_6(x-1)+\log_6(x+4)=2$ — Ответ: 5

43. $\log_2(x-3)+\log_2(x+1)=5$ — Ответ: 7

44. $\log_3(x+2)-\log_3(x-2)=1$ — Ответ: 4

45. $\log_2 x+\log_8 x=4$ — Ответ: 8

Решения C.

№27. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>3 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

Решение. По свойству суммы логарифмов:

$$\log_2\big((x+3)(x-3)\big)=4 \implies (x+3)(x-3)=2^4=16.$$

$$x^2-9=16 \implies x^2=25 \implies x=\pm 5.$$

Проверка по ОДЗ: $x>3$, значит корень $x=-5$ посторонний. Подходит $x=5$.

Ответ: 5.

№28. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-5>0 \end{cases} \Longrightarrow x>5.$$

Решение:

$$\log_3\big((x+1)(x-5)\big)=3 \implies (x+1)(x-5)=27.$$

$$x^2-4x-5=27 \implies x^2-4x-32=0 \implies x=8 \text{ или } x=-4.$$

По ОДЗ $x>5$: подходит $x=8$.

Ответ: 8.

№29. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \implies x>2.$$

Решение:

$$\log_5\big((x-1)(x-2)\big)=\log_5 6 \implies (x-1)(x-2)=6.$$

$$x^2-3x+2=6 \implies x^2-3x-4=0 \implies x=4 \text{ или } x=-1.$$

По ОДЗ $x>2$: подходит $x=4$.

Ответ: 4.

№30. **ОДЗ:** $x>0$.

Решение. Приведём все логарифмы к основанию 2:

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}; \qquad \log_{16} x=\frac{\log_2 x}{4}.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7.$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x=7 \implies \log_2 x=4 \implies x=16.$$

По ОДЗ $x=16>0$ — подходит.

Ответ: 16.

№31. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \implies x>1.$$

Решение. По свойству разности:

$$\log_2\frac{x+1}{x-1}=1 \implies \frac{x+1}{x-1}=2.$$

$$x+1=2(x-1) \implies x+1=2x-2 \implies x=3.$$

По ОДЗ $x>1$ — подходит.

Ответ: 3.

№32. **ОДЗ:** $x-4>0 \Rightarrow x>4$.

Решение:

$$x-4=4^3=64 \implies x=68.$$

По ОДЗ $x>4$ — подходит.

Ответ: 68.

№33. **ОДЗ:** $1-x>0 \Rightarrow x<1$.

Решение:

$$1-x=5 \implies x=-4.$$

По ОДЗ $x<1$ — подходит.

Ответ: -4.

№34. **ОДЗ:** $8-x>0 \Rightarrow x<8$.

Решение:

$$8-x=2 \implies x=6.$$

По ОДЗ $x<8$ — подходит.

Ответ: 6.

№35. **ОДЗ:** $15 - x > 0 \Rightarrow x < 15$.

Решение:

$$15 - x = 7 \implies x = 8.$$

По ОДЗ $x < 15$ — подходит.

Ответ: 8.

№36. **ОДЗ:** $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$.

Решение:

$$x + 4 = 16 \implies x = 12.$$

По ОДЗ $x > -4$ — подходит.

Ответ: 12.

№37. **ОДЗ:** $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.

Решение:

$$x - 2 = 11 \implies x = 13.$$

По ОДЗ $x > 2$ — подходит.

Ответ: 13.

№38. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 3 \\ x > 2 \end{cases} \implies x > 3.$$

Решение:

$$x^2 - 3x = 2x - 4 \implies x^2 - 5x + 4 = 0 \implies x = 1 \text{ или } x = 4.$$

По ОДЗ $x > 3$: подходит $x = 4$.

Ответ: 4.

№39. **ОДЗ:** $x > 0$.

Решение. Приведём к основанию 3:

$$\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x; \qquad \log_{27} x = \frac{1}{3}\log_3 x.$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{2}.$$

$$\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{2} \implies \log_3 x = 3 \implies x = 27.$$

Ответ: 27.

№40. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \implies x > 2.$$

Решение:

$$\log_5 \frac{x+2}{x-2} = 1 \implies \frac{x+2}{x-2} = 5.$$

$$x + 2 = 5(x - 2) \implies x + 2 = 5x - 10 \implies x = 3.$$

Ответ: 3.

№41. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 4 \\ x > 4 \end{cases} \implies x > 4.$$

Решение:

$$x^2 - 4x = 2x - 8 \implies x^2 - 6x + 8 = 0 \implies x = 2 \text{ или } x = 4.$$

Проверка по ОДЗ $x > 4$:

- при $x = 2$: $2 < 4$ — не удовлетворяет ОДЗ, кроме того $x^2 - 4x = -4 < 0$;

- при $x = 4$: $x = 4$ не удовлетворяет строгому неравенству $x > 4$, кроме того $2x - 8 = 0$ и $x^2 - 4x = 0$.

Оба корня посторонние. Решений нет.

Ответ: нет решений.

№42. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 1.$$

Решение:

$$\log_6\big((x-1)(x+4)\big) = 2 \implies (x-1)(x+4) = 36.$$

$$x^2 + 3x - 4 = 36 \implies x^2 + 3x - 40 = 0 \implies x = 5 \text{ или } x = -8.$$

По ОДЗ $x > 1$: подходит $x = 5$.

Ответ: 5.

№43. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 3.$$

Решение:

$$\log_2\big((x-3)(x+1)\big) = 5 \implies (x-3)(x+1) = 32.$$

$$x^2 - 2x - 3 = 32 \implies x^2 - 2x - 35 = 0 \implies x = 7 \text{ или } x = -5.$$

По ОДЗ $x > 3$: подходит $x = 7$.

Ответ: 7.

№44. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2.$$

Решение:

$$\log_3 \frac{x+2}{x-2} = 1 \implies \frac{x+2}{x-2} = 3 \implies x + 2 = 3x - 6 \implies x = 4.$$

Ответ: 4.

№45. **ОДЗ:** $x > 0$.

Решение. Приведём к основанию 2:

$$\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x.$$

$$\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 4 \implies \frac{4}{3}\log_2 x = 4 \implies \log_2 x = 3 \implies x = 8.$$

Ответ: 8.

4. Блок D. Замена переменной

Задания в формате ЕГЭ

46. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ — Ответ: 2 и 4

47. $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$ — Ответ: 3 и 27

48. $2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 = 0$ — Ответ: $\sqrt{2}$ и 4

49. $\log_5^2 x + \log_5 x - 6 = 0$ — Ответ: 1/125 и 25

50. $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$ — Ответ: 2 и 8

Составленные задания

51. $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$ — Ответ: 3 и 9

52. $\log_7^2 x - 2\log_7 x - 3 = 0$ — Ответ: 1/7 и 343

53. $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 10 = 0$ — Ответ: 4 и 32

54. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$ — Ответ: 1/4 и 16

55. $\log_6^2 x - 2\log_6 x - 3 = 0$ — Ответ: 1/6 и 216

56. $\log_5^2 x - 4\log_5 x + 3 = 0$ — Ответ: 5 и 125

57. $\log_2^2 x - 8\log_2 x + 15 = 0$ — Ответ: 8 и 32

Решения D.

№46. ОДЗ: $x > 0$.

Замена $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \implies t = 1 \text{ или } t = 2.$$

Обратная замена:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2; \qquad \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 2 и 4.

№47. ОДЗ: $x > 0$. $t = \log_3 x$:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \implies t = 1 \text{ или } t = 3.$$

Тогда $x = 3$ или $x = 27$.

Ответ: 3 и 27.

№48. ОДЗ: $x > 0$. $t = \log_2 x$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \implies t = \frac{1}{2} \text{ или } t = 2.$$

Тогда $x = \sqrt{2}$ или $x = 4$.

Ответ: $\sqrt{2}$ и 4.

№49. ОДЗ: $x > 0$. $t = \log_5 x$:

$$t^2 + t - 6 = 0 \implies t = -3 \text{ или } t = 2.$$

Тогда $x = 5^{-3} = \frac{1}{125}$ или $x = 25$.

Ответ: 1/125 и 25.

№50. ОДЗ: $x > 0$. $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \implies t = 1 \text{ или } t = 3.$$

Тогда $x = 2$ или $x = 8$.
Ответ: 2 и 8.
№51. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_3 x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \implies t = 1 \text{ или } t = 2.$$

Тогда $x = 3$ или $x = 9$.
Ответ: 3 и 9.
№52. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_7 x$:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \implies t = -1 \text{ или } t = 3.$$

Тогда $x = \frac{1}{7}$ или $x = 343$.
Ответ: 1/7 и 343.
№53. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \implies t = 2 \text{ или } t = 5.$$

Тогда $x = 4$ или $x = 32$.
Ответ: 4 и 32.
№54. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_4 x$:

$$t^2 - t - 2 = 0 \implies t = -1 \text{ или } t = 2.$$

Тогда $x = \frac{1}{4}$ или $x = 16$.
Ответ: 1/4 и 16.
№55. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_6 x$:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \implies t = -1 \text{ или } t = 3.$$

Тогда $x = \frac{1}{6}$ или $x = 216$.
Ответ: 1/6 и 216.
№56. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_5 x$:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \implies t = 1 \text{ или } t = 3.$$

Тогда $x = 5$ или $x = 125$.
Ответ: 5 и 125.
№57. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \implies t = 3 \text{ или } t = 5.$$

Тогда $x = 8$ или $x = 32$.
Ответ: 8 и 32.

5. Блок Е. Комбинированные задания

Задания в формате ЕГЭ

58. $x^{\log_2 x} = 16$ — Ответ: 4 и 1/4

59. $x^{\log_3 x} = 81$ — Ответ: 9 и 1/9

60. $\log_x 8 = \dfrac{3}{2}$ — Ответ: 4

61. $\log_x 16 = 2$ — Ответ: 4

62. $\log_{2x-3} 16 = 2$ — Ответ: 3,5

63. $\log_{x-1} 9 = 2$ — Ответ: 4

Составленные задания

64. $x^{\log_3 x} = 3$ — Ответ: 3 и 1/3

65. $x^{2\log_2 x} = 256$ — Ответ: 4 и 1/4

66. $\log_x 27 = \dfrac{3}{2}$ — Ответ: 9

67. $\log_x 125 = 3$ — Ответ: 5

68. $\log_{x+2} 25 = 2$ — Ответ: 3

69. $\log_{3x-1} 4 = 1$ — Ответ: 5/3

70. $x^{\log_5 x} = 625$ — Ответ: 25 и 1/25

Решения Е.

№58. ОДЗ:

$$x > 0$$

Логарифмируем обе части по основанию 2:

$$\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2 16 \implies (\log_2 x)^2 = 4.$$

$$\log_2 x = \pm 2 \implies x = 4 \text{ или } x = \frac{1}{4}.$$

Оба удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 4 и 1/4.

№59. ОДЗ: $x > 0$. Логарифмируем по 3: $(\log_3 x)^2 = 4 \Rightarrow \log_3 x = \pm 2$. Тогда $x = 9$ или $x = \frac{1}{9}$.

Ответ: 9 и 1/9.

№60. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. Решение: $x^{3/2} = 8 \Rightarrow x = 8^{2/3} = 4$.

Ответ: 4.

№61. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ (так как $x > 0$).

Ответ: 4.

№62. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \end{cases} \implies x > 1{,}5,\ x \neq 2.$$

Решение: $(2x-3)^2 = 16 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 4$. Так как $2x - 3 > 0$, то $2x - 3 = 4 \Rightarrow x = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

№63. ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \implies x > 1,\ x \neq 2.$$

Решение: $(x-1)^2 = 9 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ (берём положительный корень, так как $x - 1 > 0$).
Ответ: 4.
№64. **ОДЗ:** $x > 0$. $(\log_3 x)^2 = 1 \Rightarrow \log_3 x = \pm 1 \Rightarrow x = 3$ или $x = \frac{1}{3}$.
Ответ: 3 и 1/3.
№65. **ОДЗ:** $x > 0$. Логарифмируем по 2: $2(\log_2 x)^2 = 8 \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Rightarrow \log_2 x = \pm 2 \Rightarrow x = 4$ или $x = \frac{1}{4}$.
Ответ: 4 и 1/4.
№66. **ОДЗ:** $x > 0$, $x \neq 1$. $x^{3/2} = 27 \Rightarrow x = 27^{2/3} = 9$.
Ответ: 9.
№67. **ОДЗ:** $x > 0$, $x \neq 1$. $x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$.
Ответ: 5.
№68. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x > -2,\ x \neq -1.$$

Решение: $(x+2)^2 = 25 \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$.
Ответ: 3.
№69. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 3x - 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x > \tfrac{1}{3},\ x \neq \tfrac{2}{3}.$$

Решение: $3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$.
Ответ: 5/3.
№70. **ОДЗ:** $x > 0$. $(\log_5 x)^2 = 4 \Rightarrow \log_5 x = \pm 2 \Rightarrow x = 25$ или $x = \frac{1}{25}$.
Ответ: 25 и 1/25.

Часть 2. ОДЗ, уравнения и неравенства

6. Ограничения на логарифмы (ОДЗ)

$\log_a b$ существует тогда и только тогда, когда

$$a > 0, \qquad a \neq 1, \qquad b > 0.$$

Важно!

Три главных правила:

1. Аргумент > 0.
2. Основание > 0 и $\neq 1$.
3. При нескольких логарифмах ОДЗ — пересечение условий.

7. Блок F. Найти область допустимых значений

Составленные задания

71. $\log_2(x-3)$
72. $\log_5(7-2x)$
73. $\log_3(x^2-4)$
74. $\log_4(x^2-5x+6)$
75. $\log_{x-2}5$
76. $\log_{x+1}(x-3)$
77. $\log_{2x-1}(x+4)$
78. $\log_{x^2-4}(x+1)$
79. $\log_2(x-1)+\log_2(5-x)$
80. $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)$
81. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}$
82. $\sqrt{\log_3(x-2)}$
83. $\log_{|x|-2}(x+3)$
84. $\log_{x^2-9}(x^2-5x+6)$
85. $\log_2(x-1)+\log_{x-1}2$

Решения F.

№71. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2>0,\ 2\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

Ответ: $(3;+\infty)$.

№72. ОДЗ:

$$\begin{cases} 7-2x>0 \\ 5>0,\ 5\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x<3{,}5.$$

Ответ: $(-\infty;3{,}5)$.

№73. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ 3>0,\ 3\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x<-2 \text{ или } x>2.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

№74. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ 4>0,\ 4\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x<2 \text{ или } x>3.$$

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

№75. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-2\neq 1 \\ 5>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2,\ x\neq 3.$$

Ответ: $(2;3)\cup(3;+\infty)$.

№76. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x-3>0 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

Ответ: $(3;+\infty)$.

№77. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1\neq 1 \\ x+4>0 \end{cases} \Longrightarrow x\in(0{,}5;1)\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $(0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$.

№78. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x^2-4\neq 1 \\ x+1>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2,\ x\neq\sqrt{5}.$$

Ответ: $(2;\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty)$.

№79. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Longrightarrow 1<x<5.$$

Ответ: $(1;5)$.

№80. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

Ответ: $(4;+\infty)$.

№81. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \log_2(x-1)\neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x>1,\ x\neq 2.$$

Ответ: $(1;2)\cup(2;+\infty)$.

№82. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ \log_3(x-2)\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow x\geq 3.$$

Ответ: $[3;+\infty)$.

№83. ОДЗ:

$$\begin{cases} |x|-2>0 \\ |x|-2\neq 1 \\ x+3>0 \end{cases} \Longrightarrow x\in(-3;-2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $(-3;-2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

№84. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-9>0 \\ x^2-9\neq 1 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ или } x>3 \\ x\neq\pm\sqrt{10} \\ x<2 \text{ или } x>3 \end{cases}$$

Пересечение: $x<-3$ или $x>3$, $x\neq\pm\sqrt{10}$.

Ответ: $(-\infty;-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{10};-3)\cup(3;\sqrt{10})\cup(\sqrt{10};+\infty)$.

№85. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x>1,\ x\neq 2.$$

Ответ: $(1;2)\cup(2;+\infty)$.

8. Блок G. Уравнения с ОДЗ-ловушками

Составленные задания

86. $\log_2(x-1)+\log_2(x-3)=3$
87. $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)=3$
88. $\log_5(x-2)+\log_5(x+3)=\log_5 14$
89. $\log_2(x^2-4x)=\log_2(3x-10)$
90. $\log_3(x^2-9)=\log_3(2x-6)$
91. $\log_4(x^2-5x)=\log_4(2x-12)$
92. $\log_2(x-1)-\log_2(x+3)=1$
93. $\log_3(x+4)-\log_3(x-2)=1$
94. $\log_2(x^2-3x-4)=\log_2(2x+2)$
95. $\log_6(x^2-6x)=\log_6(3x-18)$
96. $\log_3(x^2-4x+3)=\log_3(x-1)$
97. $\log_4(x^2-2x)=\log_4(3x-6)$
98. $\log_5(x^2-3x)=\log_5(2x-6)$
99. $\log_2(x^2-5x+6)=\log_2(x-2)$
100. $\log_5(x^2-4x)=\log_5(3x-6)$

Решения G.

№86. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

Решение: $\log_2((x-1)(x-3))=3 \Rightarrow (x-1)(x-3)=8 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=5$ или $x=-1$. По ОДЗ $x>3$: $x=5$.

Ответ: 5.

№87. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

Решение: $(x+2)(x-4)=27 \Rightarrow x^2-2x-35=0 \Rightarrow x=7$ или $x=-5$. По ОДЗ $x=7$.

Ответ: 7.

№88. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2.$$

Решение: $(x-2)(x+3)=14 \Rightarrow x^2+x-20=0 \Rightarrow x=4$ или $x=-5$. По ОДЗ $x=4$.

Ответ: 4.

№89. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x>0 \\ 3x-10>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<0 \text{ или } x>4 \\ x>\frac{10}{3} \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

Решение: $x^2-4x=3x-10 \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow x=2$ или $x=5$. По ОДЗ $x=5$.

Ответ: 5.

№90. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-9>0 \\ 2x-6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ или } x>3 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

Решение: $x^2-9=2x-6 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=3$ или $x=-1$. По ОДЗ $x>3$ ни один не подходит.
Ответ: нет решений.

№91. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-5x>0 \\ 2x-12>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ или } x>5 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6.$$

Решение: $x^2-5x=2x-12 \Rightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow x=3$ или $x=4$. По ОДЗ $x>6$ оба не подходят.
Ответ: нет решений.

№92. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow x>1.$$

Решение: $\log_2 \frac{x-1}{x+3}=1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+3}=2 \Rightarrow x-1=2x+6 \Rightarrow x=-7$. По ОДЗ $x>1$ не подходит.
Ответ: нет решений.

№93. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2.$$

Решение: $\log_3 \frac{x+4}{x-2}=1 \Rightarrow \frac{x+4}{x-2}=3 \Rightarrow x+4=3x-6 \Rightarrow x=5$.
Ответ: 5.

№94. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ 2x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ или } x>4 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>4.$$

Решение: $x^2-3x-4=2x+2 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=6$ или $x=-1$. По ОДЗ $x>4$: $x=6$.
Ответ: 6.

№95. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-6x>0 \\ 3x-18>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ или } x>6 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6.$$

Решение: $x^2-6x=3x-18 \Rightarrow x^2-9x+18=0 \Rightarrow x=3$ или $x=6$. По ОДЗ $x>6$ оба не подходят.
Ответ: нет решений.

№96. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \text{ или } x>3 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

Решение: $x^2-4x+3=x-1 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1$ или $x=4$. По ОДЗ $x>3$: $x=4$.
Ответ: 4.

№97. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 3x-6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ или } x>2 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x>2.$$

Решение: $x^2-2x=3x-6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ или $x=3$. По ОДЗ $x>2$: $x=3$.
Ответ: 3.

№98. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ 2x-6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ или } x>3 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

Решение: $x^2-3x=2x-6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ или $x=3$. По ОДЗ $x>3$ оба не подходят.
Ответ: нет решений.

№99. ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \text{ или } x>3 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

Решение: $x^2 - 5x + 6 = x - 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ или $x = 4$. По ОДЗ $x > 3$: $x = 4$.
Ответ: 4.

№100. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 4 \\ x > 2 \end{cases} \Longrightarrow x > 4.$$

Решение: $x^2 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ или $x = 6$. По ОДЗ $x > 4$: $x = 6$.
Ответ: 6.

9. Блок Н. Задания второй части

Составленные задания

Задание 101. а) Решите уравнение

$$2\log_2^2 x - 9\log_2 x + 4 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{2};\ 16\right]$.

Задание 102. а) Решите уравнение

$$\log_3^2 x - 6\log_3 x + 5 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{3};\ 243\right]$.

Задание 103. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 16\right]$.

Задание 104. а) Решите уравнение

$$\log_2(x-1) + \log_{x-1} 2 = 2.$$

б) Найдите корни на отрезке $[2;\ 5]$.

Задание 105. а) Решите уравнение

$$\log_3(x+2) + \log_{x+2} 3 = 2.$$

б) Найдите корни на отрезке $[-1;\ 5]$.

Задание 106. а) Решите уравнение

$$x^{\log_2 x} = 2.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{4};\ 4\right]$.

Задание 107. а) Решите уравнение

$$x^{2\log_3 x} = 9.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{3};\ 27\right]$.

Задание 108. а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 5x) = \log_2(2x - 6).$$

б) Найдите корни на отрезке $[3;\ 7]$.

Задание 109. а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 5x + 6) = \log_3(x - 2).$$

б) Найдите корни на отрезке $[2;\ 5]$.

Задание 110. а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 6x + 8) = \log_2(x - 2).$$

б) Найдите корни на отрезке $[1;\ 6]$.

Задание 111. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x - \log_2 x^4 + 3 = 0.$$

б) Найдите корни на отрезке $[1;\ 16]$.

Задание 112. а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = 2.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 8\right]$.

Задание 113. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 9\log_2 x + 20 = 0.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 64\right]$.

Задание 114. а) Решите уравнение

$$\log_5^2 x - 5\log_5 x + 6 = 0.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{25};\ 125\right]$.

Задание 115. а) Решите уравнение

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0.$$

б) Найдите корни на отрезке $\left[\frac{1}{9};\ 27\right]$.

Решения Н.

№101. **ОДЗ:** $x > 0$. Замена $t = \log_2 x$: $2t^2 - 9t + 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ или $t = \frac{1}{2}$. Тогда $x = 16$ или $x = \sqrt{2}$. Оба входят в $\left[\frac{1}{2}; 16\right]$.

Ответ: а) $\sqrt{2}, 16$; б) $\sqrt{2}, 16$.

№102. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_3 x$: $t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1$ или $t = 5$. Тогда $x = 3$ или $x = 243$. Оба входят.

Ответ: а) $3, 243$; б) $3, 243$.

№103. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_2 x$: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -1$ или $t = 4$. Тогда $x = \frac{1}{2}$ или $x = 16$. Оба входят в $\left[\frac{1}{4}; 16\right]$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}, 16$; б) $\frac{1}{2}, 16$.

№104. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x > 1,\ x \neq 2.$$

Замена $t = \log_2(x-1)$, тогда $\log_{x-1} 2 = \frac{1}{t}$:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Longrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Longrightarrow (t-1)^2 = 0 \Longrightarrow t = 1.$$

Тогда $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: а) 3; б) 3.

№105. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x > -2,\ x \neq -1.$$

Замена $t = \log_3(x+2)$: $t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t = 1$. Тогда $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: а) 1; б) 1.

№106. **ОДЗ:** $x > 0$. Логарифмируем по 2: $(\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow \log_2 x = \pm 1$. Тогда $x = 2$ или $x = \frac{1}{2}$. Оба входят в $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}, 2$; б) $\frac{1}{2}, 2$.

№107. **ОДЗ:** $x > 0$. Логарифмируем по 3: $2(\log_3 x)^2 = 2 \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 1 \Rightarrow \log_3 x = \pm 1$. Тогда $x = 3$ или $x = \frac{1}{3}$. Оба входят в $\left[\frac{1}{3}; 27\right]$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}, 3$; б) $\frac{1}{3}, 3$.

№108. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ 2x - 6 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 5 \\ x > 3 \end{cases} \Longrightarrow x > 5.$$

Приравниваем: $x^2 - 5x = 2x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ или $x = 6$. По ОДЗ $x = 6$.

Ответ: а) 6; б) 6.

№109. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ или } x > 3 \\ x > 2 \end{cases} \Longrightarrow x > 3.$$

Приравниваем: $x^2 - 5x + 6 = x - 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ или $x = 4$. По ОДЗ $x = 4$.

Ответ: а) 4; б) 4.

№110. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ или } x > 4 \\ x > 2 \end{cases} \Longrightarrow x > 4.$$

Приравниваем: $x^2 - 6x + 8 = x - 2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ или $x = 5$. По ОДЗ $x = 5$.

Ответ: а) 5; б) 5.

№111. **ОДЗ:** $x > 0$. Так как $\log_2 x^4 = 4 \log_2 x$, уравнение принимает вид $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$ или $t = 3$. Тогда $x = 2$ или $x = 8$. Оба входят в $[1; 16]$.

Ответ: а) $2, 8$; б) $2, 8$.

№112. **ОДЗ:** $x > 0$, $x \neq 1$. Замена $t = \log_2 x$: $\frac{1}{t} + t = 2 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$. Тогда $x = 2$.

Ответ: а) 2; б) 2.

№113. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_2 x$: $t^2 - 9t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4$ или $t = 5$. Тогда $x = 16$ или $x = 32$. Оба входят в $\left[\frac{1}{2}; 64\right]$.

Ответ: а) $16, 32$; б) $16, 32$.

№114. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_5 x$: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$ или $t = 3$. Тогда $x = 25$ или $x = 125$. Оба входят в $\left[\frac{1}{25}; 125\right]$.

Ответ: а) $25, 125$; б) $25, 125$.

№115. **ОДЗ:** $x > 0$. $t = \log_3 x$: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1$ или $t = 3$. Тогда $x = \frac{1}{3}$ или $x = 27$. Оба входят в $\left[\frac{1}{9}; 27\right]$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}, 27$; б) $\frac{1}{3}, 27$.

10. Блок I. Задания в формате ЕГЭ

Задания в формате ЕГЭ

Задание 116. а) Решите уравнение

$$2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0.$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Задание 117. а) Решите уравнение

$$6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0.$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2;\ 2{,}5]$.

Задание 118. а) Решите уравнение

$$\log_4(x+3) = \log_4(4x-15).$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2;\ 8]$.

Задание 119. а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2-9) = \log_2(3-x).$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[-5;\ 2]$.

Задание 120. а) Решите уравнение

$$3\log_2^2 x - 7\log_2 x + 2 = 0.$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{2};\ 8\right]$.

Задание 121. а) Решите уравнение

$$\log_5(x^2-4x) = \log_5(3x-10).$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[3;\ 7]$.

Задание 122. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0.$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2;\ 20]$.

Задание 123. а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2-5x+6) = \log_3(2x-4).$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[2;\ 6]$.

Задание 124. а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2-6x+8) = \log_2(2x-4).$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[1;\ 7]$.

Задание 125. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x - 10\log_2 x + 24 = 0.$$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[4;\ 100]$.

Решения I.

№116. ОДЗ: $2\cos x > 0 \Rightarrow \cos x > 0$. Замена $t = \log_2(2\cos x)$: $2t^2 - 9t + 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ или $t = \frac{1}{2}$. Из $t = 4$: $\cos x = 8$ — нет. Из $t = \frac{1}{2}$: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. На $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

№117. **ОДЗ:** $x>0$. $t=\log_8 x$: $6t^2-5t+1=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ или $t=\frac{1}{3}$. Тогда $x=2\sqrt{2}$ или $x=2$. На $[2;2{,}5]$ входит только $x=2$.

Ответ: а) $2,\ 2\sqrt{2}$; б) 2.

№118. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 4x-15>0 \end{cases} \Longrightarrow x>3{,}75.$$

$x+3=4x-15\Rightarrow 3x=18\Rightarrow x=6$. По ОДЗ подходит.

Ответ: а) 6; б) 6.

№119. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2-9>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Longrightarrow x<-3.$$

$x^2-9=3-x\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow x=-4$ или $x=3$. По ОДЗ $x=-4$.

Ответ: а) -4; б) -4.

№120. **ОДЗ:** $x>0$. $t=\log_2 x$: $3t^2-7t+2=0\Rightarrow t=2$ или $t=\frac{1}{3}$. Тогда $x=4$ или $x=\sqrt[3]{2}$. Оба входят в $\left[\frac{1}{2};8\right]$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{2},\ 4$; б) $\sqrt[3]{2},\ 4$.

№121. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2-4x>0 \\ 3x-10>0 \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

$x^2-4x=3x-10\Rightarrow x^2-7x+10=0\Rightarrow x=2$ или $x=5$. По ОДЗ $x=5$.

Ответ: а) 5; б) 5.

№122. **ОДЗ:** $x>0$. $t=\log_2 x$: $t^2-5t+4=0\Rightarrow t=1$ или $t=4$. Тогда $x=2$ или $x=16$. Оба входят в $[2;20]$.

Ответ: а) 2, 16; б) 2, 16.

№123. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ 2x-4>0 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

$x^2-5x+6=2x-4\Rightarrow x^2-7x+10=0\Rightarrow x=2$ или $x=5$. По ОДЗ $x=5$.

Ответ: а) 5; б) 5.

№124. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ 2x-4>0 \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

$x^2-6x+8=2x-4\Rightarrow x^2-8x+12=0\Rightarrow x=2$ или $x=6$. По ОДЗ $x=6$.

Ответ: а) 6; б) 6.

№125. **ОДЗ:** $x>0$. $t=\log_2 x$: $t^2-10t+24=0\Rightarrow t=4$ или $t=6$. Тогда $x=16$ или $x=64$. Оба входят в $[4;100]$.

Ответ: а) 16, 64; б) 16, 64.

11. Блок J. Логарифмические неравенства

Основание $a > 1$ — знак сохраняется; $0 < a < 1$ — знак меняется.
Рационализация: $\log_a f - \log_a g \vee 0 \iff (a-1)(f-g) \vee 0$.

12. Блок J1. Сумма и разность

Составленные задания

126. $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) < 1$

127. $\log_3(x+1) + \log_3(x-3) \le 2$

128. $\log_5(x-2) - \log_5(x+1) > 0$

129. $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) \ge 1$

130. $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) \le 1$

131. $\log_4(x-1) + \log_4(x+2) \le 1$

132. $\log_2(x-3) - \log_2(x+1) \ge -1$

133. $\log_5(x+4) + \log_5(x-2) \ge 1$

134. $\log_3(x-1) - \log_3(x+2) < 0$

135. $\log_6(x+5) + \log_6(x-1) \le 2$

Решения J1.
№126. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2.$$

Решение: $\log_2((x-1)(x-2)) < 1 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 2 \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$. Пересечение с ОДЗ: $(2;3)$.
Ответ: $(2;3)$.
№127. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Longrightarrow x > 3.$$

Решение: $(x+1)(x-3) \le 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 12 \le 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{13} \le x \le 1 + \sqrt{13}$. Пересечение: $(3; 1+\sqrt{13}]$.
Ответ: $(3; 1+\sqrt{13}]$.
№128. ОДЗ:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2.$$

Решение: $\log_5 \frac{x-2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} > 1 \Rightarrow x < -1$. Пересечение с ОДЗ $x > 2$ — пусто.
Ответ: нет решений.
№129. ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Longrightarrow x > 1.$$

Решение: $\log_2 \frac{x+3}{x-1} \ge 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} \ge 2 \Rightarrow \frac{5-x}{x-1} \ge 0$. Метод интервалов: $1 < x \le 5$.
Ответ: $(1;5]$.

№130. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2.$$

Решение: $(x+2)(x-2)\le 3 \Rightarrow x^2\le 7 \Rightarrow 2<x\le\sqrt{7}$.
Ответ: $(2;\sqrt{7}]$.
№131. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Longrightarrow x>1.$$

Решение: $(x-1)(x+2)\le 4 \Rightarrow x^2+x-6\le 0 \Rightarrow -3\le x\le 2$. Пересечение: $(1;2]$.
Ответ: $(1;2]$.
№132. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Longrightarrow x>3.$$

Решение: $\log_2\frac{x-3}{x+1}\ge -1 \Rightarrow \frac{x-3}{x+1}\ge\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x-3)-(x+1)}{2(x+1)}\ge 0 \Rightarrow \frac{x-7}{x+1}\ge 0$. Значит, $x\ge 7$.
Ответ: $[7;+\infty)$.
№133. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2.$$

Решение: $(x+4)(x-2)\ge 5 \Rightarrow x^2+2x-13\ge 0 \Rightarrow x\le -1-\sqrt{14}$ или $x\ge -1+\sqrt{14}$. Пересечение: $x\ge -1+\sqrt{14}$.
Ответ: $[-1+\sqrt{14};+\infty)$.
№134. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Longrightarrow x>1.$$

Решение: $\log_3\frac{x-1}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+2}<1 \Rightarrow \frac{-3}{x+2}<0 \Rightarrow x>-2$. Пересечение: $(1;+\infty)$.
Ответ: $(1;+\infty)$.
№135. **ОДЗ:**

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Longrightarrow x>1.$$

Решение: $(x+5)(x-1)\le 36 \Rightarrow x^2+4x-41\le 0 \Rightarrow -2-3\sqrt{5}\le x\le -2+3\sqrt{5}$. Пересечение: $(1;-2+3\sqrt{5}]$.
Ответ: $(1;-2+3\sqrt{5}]$.

13. Блок J2. Замена переменной

Составленные задания

136. $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 > 0$

137. $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \le 0$

138. $2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 \le 0$

139. $\log_5^2 x - 2\log_5 x - 8 \ge 0$

140. $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 < 0$

141. $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 > 0$

142. $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 < 0$

143. $\log_6^2 x - 3\log_6 x + 2 \le 0$

144. $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 \ge 0$

145. $3\log_2^2 x - 7\log_2 x + 2 > 0$

Решения J2.

№136. Неравенство:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 > 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена.

$$t = \log_2 x.$$

Тогда $\log_2^2 x = t^2$, и неравенство принимает вид:

$$t^2 - 5t + 4 > 0.$$

Шаг 3. Решаем квадратное. Корни: $t = 1$, $t = 4$. Ветви параболы вверх, знак «+» вне отрезка $[1; 4]$:

$$t < 1 \quad \text{или} \quad t > 4.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\log_2 x < 1 \Longrightarrow 0 < x < 2;$$

$$\log_2 x > 4 \Longrightarrow x > 16.$$

Шаг 5. Пересечение с ОДЗ. Автоматически выполнено.
Ответ: $x \in (0; 2) \cup (16; +\infty)$.

№137. Неравенство:

$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \le 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_3 x$. Тогда:

$$t^2 - 5t + 6 \le 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = 2$, $t = 3$. Знак «$\le$» внутри отрезка:

$$2 \le t \le 3.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$2 \le \log_3 x \le 3 \Longrightarrow 9 \le x \le 27.$$

Ответ: $x \in [9; 27]$.

№138. Неравенство:

$$2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 \le 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_2 x$:

$$2t^2 - 5t + 2 \le 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 2$. Знак «$\le$»:

$$\frac{1}{2} \le t \le 2.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\frac{1}{2} \le \log_2 x \le 2 \Longrightarrow \sqrt{2} \le x \le 4.$$

Ответ: $x \in [\sqrt{2}; 4]$.

№139. Неравенство:

$$\log_5^2 x - 2\log_5 x - 8 \ge 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_5 x$:

$$t^2 - 2t - 8 \ge 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = -2$, $t = 4$. Знак «$\ge$»:

$$t \le -2 \quad \text{или} \quad t \ge 4.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\log_5 x \le -2 \Longrightarrow 0 < x \le \frac{1}{25};$$
$$\log_5 x \ge 4 \Longrightarrow x \ge 625.$$

Шаг 5. Пересечение с ОДЗ ($x > 0$):

$$x \in \left(0; \frac{1}{25}\right] \cup [625; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{25}\right] \cup [625; +\infty)$.

№140. Неравенство:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 < 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 5t + 6 < 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = 2$, $t = 3$. Знак «$<$»:

$$2 < t < 3.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$2 < \log_2 x < 3 \Longrightarrow 4 < x < 8.$$

Ответ: $x \in (4; 8)$.

№141. Неравенство:

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 > 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_3 x$:

$$t^2 - 3t - 4 > 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = -1$, $t = 4$. Знак «>»:

$$t < -1 \quad \text{или} \quad t > 4.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\log_3 x < -1 \Longrightarrow 0 < x < \frac{1}{3};$$

$$\log_3 x > 4 \Longrightarrow x > 81.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (81; +\infty)$.

№142. Неравенство:

$$\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 < 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 6t + 8 < 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = 2$, $t = 4$. Знак «<»:

$$2 < t < 4.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$2 < \log_2 x < 4 \Longrightarrow 4 < x < 16.$$

Ответ: $x \in (4; 16)$.

№143. Неравенство:

$$\log_6^2 x - 3\log_6 x + 2 \leq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_6 x$:

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = 1$, $t = 2$. Знак «≤»:

$$1 \leq t \leq 2.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$1 \leq \log_6 x \leq 2 \Longrightarrow 6 \leq x \leq 36.$$

Ответ: $x \in [6; 36]$.

№144. Неравенство:

$$\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 \geq 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_4 x$:

$$t^2 - 3t + 2 \geq 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = 1$, $t = 2$. Знак «$\geq$»:

$$t \leq 1 \quad \text{или} \quad t \geq 2.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\log_4 x \leq 1 \Longrightarrow 0 < x \leq 4;$$

$$\log_4 x \geq 2 \Longrightarrow x \geq 16.$$

Ответ: $x \in (0; 4] \cup [16; +\infty)$.

№145. Неравенство:

$$3\log_2^2 x - 7\log_2 x + 2 > 0.$$

Шаг 1. ОДЗ.

$$x > 0$$

Шаг 2. Замена. $t = \log_2 x$:

$$3t^2 - 7t + 2 > 0.$$

Шаг 3. Решаем. Корни: $t = \dfrac{1}{3}$, $t = 2$. Знак «$>$»:

$$t < \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad t > 2.$$

Шаг 4. Обратная замена.

$$\log_2 x < \frac{1}{3} \Longrightarrow 0 < x < \sqrt[3]{2};$$

$$\log_2 x > 2 \Longrightarrow x > 4.$$

Ответ: $x \in (0; \sqrt[3]{2}) \cup (4; +\infty)$.

14. Блок J3. Метод рационализации

Составленные задания

146. $\log_2 \dfrac{x-1}{x+2} \le 0$

147. $\log_{0,5} \dfrac{x+3}{x-2} \ge 0$

148. $\log_3(x^2-4x+3) \le \log_3(x-1)$

149. $\log_2(x^2-4x) \ge \log_2(2x-5)$

150. $\log_{0,5}(x^2-3x) \ge \log_{0,5}(x+5)$

151. $\log_4(x^2-4x) \le \log_4(x+1)$

152. $\log_2(x^2-3x-4) \ge \log_2(x+1)$

153. $\log_{0,5}(x^2-4x-5) \ge -3$

154. $\log_3(x^2-4x+3) \le \log_3(x+3)$

155. $\log_5(x^2-5x) \le \log_5(2x-8)$

Решения J3.

№146.

ОДЗ:

$$\frac{x-1}{x+2} > 0 \Longrightarrow x < -2 \text{ или } x > 1.$$

Решение:

$$\log_2 \frac{x-1}{x+2} \le 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x+2} \le 1 \Longrightarrow \frac{-3}{x+2} \le 0.$$

Числитель отрицателен, значит знаменатель положителен:

$$x+2 > 0 \Longrightarrow x > -2.$$

Пересечение с ОДЗ: $x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

№147.

ОДЗ:

$$\frac{x+3}{x-2} > 0 \Longrightarrow x < -3 \text{ или } x > 2.$$

Основание $0{,}5 < 1$ — знак меняется:

$$\frac{x+3}{x-2} \le 1 \Longrightarrow \frac{5}{x-2} \le 0.$$

Числитель положителен, значит $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$.

Пересечение с ОДЗ: $x < -3$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

№148.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 3 \\ x > 1 \end{cases} \Longrightarrow x > 3.$$

Основание $3 > 1$ — знак сохраняется:

$$x^2-4x+3 \le x-1 \Longrightarrow x^2-5x+4 \le 0 \Longrightarrow 1 \le x \le 4.$$

Пересечение с ОДЗ: $3 < x \leq 4$.
Ответ: $x \in (3;4]$.

№149.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ 2x - 5 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 4 \\ x > 2{,}5 \end{cases} \Longrightarrow x > 4.$$

Основание $2 > 1$:

$$x^2 - 4x \geq 2x - 5 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 \geq 0 \Longrightarrow x \leq 1 \text{ или } x \geq 5.$$

Пересечение с ОДЗ: $x \geq 5$.
Ответ: $x \in [5; +\infty)$.

№150.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Longrightarrow -5 < x < 0 \text{ или } x > 3.$$

Основание $0{,}5 < 1$ — знак меняется:

$$x^2 - 3x \leq x + 5 \Longrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Longrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

Пересечение: $[-1;0) \cup (3;5]$.
Ответ: $x \in [-1;0) \cup (3;5]$.

№151.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow -1 < x < 0 \text{ или } x > 4.$$

Основание $4 > 1$:

$$x^2 - 4x \leq x + 1 \Longrightarrow x^2 - 5x - 1 \leq 0.$$

Корни: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$.
Знак «$\leq$»: $\dfrac{5 - \sqrt{29}}{2} \leq x \leq \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$.
Пересечение с ОДЗ: $\dfrac{5 - \sqrt{29}}{2} \leq x < 0$ или $4 < x \leq \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$.
Ответ: $x \in \left[\dfrac{5 - \sqrt{29}}{2}; 0\right) \cup \left(4; \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}\right]$.

№152.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 4.$$

Основание $2 > 1$:

$$x^2 - 3x - 4 \geq x + 1 \Longrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Longrightarrow x \leq -1 \text{ или } x \geq 5.$$

Пересечение: $x \geq 5$.
Ответ: $x \in [5; +\infty)$.

№153.
ОДЗ:

$$x^2 - 4x - 5 > 0 \Longrightarrow x < -1 \text{ или } x > 5.$$

Основание $0{,}5 < 1$ — знак меняется:

$$x^2 - 4x - 5 \le (0{,}5)^{-3} = 8 \Longrightarrow x^2 - 4x - 13 \le 0.$$

Корни: $x = 2 \pm \sqrt{17}$. Значит, $2 - \sqrt{17} \le x \le 2 + \sqrt{17}$.
Пересечение с ОДЗ: $[2 - \sqrt{17}; -1) \cup (5; 2 + \sqrt{17}]$.
Ответ: $x \in [2 - \sqrt{17}; -1) \cup (5; 2 + \sqrt{17}]$.

№154.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow -3 < x < 1 \text{ или } x > 3.$$

Основание $3 > 1$:

$$x^2 - 4x + 3 \le x + 3 \Longrightarrow x^2 - 5x \le 0 \Longrightarrow 0 \le x \le 5.$$

Пересечение: $[0; 1) \cup (3; 5]$.
Ответ: $x \in [0; 1) \cup (3; 5]$.

№155.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 5.$$

Основание $5 > 1$:

$$x^2 - 5x \le 2x - 8 \Longrightarrow x^2 - 7x + 8 \le 0.$$

Корни: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$. Значит, $\dfrac{7 - \sqrt{17}}{2} \le x \le \dfrac{7 + \sqrt{17}}{2}$.
Пересечение с $x > 5$: $5 < x \le \dfrac{7 + \sqrt{17}}{2}$.
Ответ: $x \in \left(5; \dfrac{7 + \sqrt{17}}{2}\right]$.

15. Блок J4. Логарифм в основании

Составленные задания

156. $\log_{x-1} 4 < 2$

157. $\log_{x+2} 9 \geq 2$

158. $\log_x 5 > 1$

159. $\log_{x-1}(x+3) > 1$

160. $\log_{2x-1}(x+2) \leq 1$

161. $\log_{x-2}(x+1) > 1$

162. $\log_{3x-2}(x+1) \leq 1$

163. $\log_{x+1}(x-1) < 1$

164. $\log_{2x-3}(x+1) \geq 1$

165. $\log_{x^2-4}(x+1) > 1$

Решения J4.

№156.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x>1,\ x\neq 2.$$

Случай 1. $x-1>1$, то есть $x>2$. Знак сохраняется:

$$4<(x-1)^2 \Longrightarrow (x-3)(x+1)>0.$$

С учётом $x>2$: $x>3$.

Случай 2. $0<x-1<1$, то есть $1<x<2$. Знак меняется:

$$4>(x-1)^2 \Longrightarrow -2<x-1<2 \Longrightarrow -1<x<3.$$

С учётом $1<x<2$: весь интервал $(1;2)$.

Объединение: $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $x\in(1;2)\cup(3;+\infty)$.

№157.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow x>-2,\ x\neq -1.$$

Случай 1. $x>-1$. Знак сохраняется:

$$9\geq(x+2)^2 \Longrightarrow -3\leq x+2\leq 3 \Longrightarrow -5\leq x\leq 1.$$

С учётом $x>-1$: $-1<x\leq 1$.

Случай 2. $-2<x<-1$. Знак меняется:

$$9\leq(x+2)^2 \Longrightarrow x+2\geq 3 \text{ или } x+2\leq -3.$$

Первое даёт $x\geq 1$, второе — $x\leq -5$ — оба вне интервала.

Ответ: $x\in(-1;1]$.

№158.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Случай 1. $x > 1$. Знак сохраняется:

$$5 > x \Longrightarrow 1 < x < 5.$$

Случай 2. $0 < x < 1$. Знак меняется:

$$5 < x \text{ — противоречие.}$$

Ответ: $x \in (1; 5)$.

№159.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 1,\ x \neq 2.$$

Случай 1. $x > 2$. Знак сохраняется:

$$x + 3 > x - 1 \Longrightarrow 3 > -1 \text{ — верно.}$$

Значит, все $x > 2$.
Случай 2. $1 < x < 2$. Знак меняется:

$$x + 3 < x - 1 \Longrightarrow 3 < -1 \text{ — неверно.}$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

№160.
ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \neq 1 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 0{,}5,\ x \neq 1.$$

Случай 1. $x > 1$. Знак сохраняется:

$$x + 2 \leq 2x - 1 \Longrightarrow x \geq 3.$$

Случай 2. $0{,}5 < x < 1$. Знак меняется:

$$x + 2 \geq 2x - 1 \Longrightarrow x \leq 3 \text{ — верно.}$$

Ответ: $x \in (0{,}5; 1) \cup [3; +\infty)$.

№161.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2,\ x \neq 3.$$

Случай 1. $x > 3$. Знак сохраняется:

$$x + 1 > x - 2 \Longrightarrow 1 > -2 \text{ — верно.}$$

Случай 2. $2 < x < 3$. Знак меняется:

$$x + 1 < x - 2 \Longrightarrow 1 < -2 \text{ — неверно.}$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

№162.
ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 3x - 2 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > \frac{2}{3},\ x \neq 1.$$

Случай 1. $x > 1$. Знак сохраняется:

$$x + 1 \leq 3x - 2 \Longrightarrow x \geq 1{,}5.$$

Случай 2. $\frac{2}{3} < x < 1$. Знак меняется:

$$x + 1 \geq 3x - 2 \Longrightarrow x \leq 1{,}5 \text{ — верно.}$$

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup [1{,}5; +\infty)$.

№163.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 1.$$

При $x > 1$ основание $x + 1 > 2 > 1$, знак сохраняется:

$$x - 1 < x + 1 \Longrightarrow -1 < 1 \text{ — верно.}$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

№164.
ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 1{,}5,\ x \neq 2.$$

Случай 1. $x > 2$. Знак сохраняется:

$$x + 1 \geq 2x - 3 \Longrightarrow x \leq 4.$$

Значит, $2 < x \leq 4$.
Случай 2. $1{,}5 < x < 2$. Знак меняется:

$$x + 1 \leq 2x - 3 \Longrightarrow x \geq 4 \text{ — неверно.}$$

Ответ: $x \in (2; 4]$.

№165.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2,\ x \neq \sqrt{5}.$$

Случай 1. $x^2 - 4 > 1$, то есть $x > \sqrt{5}$. Знак сохраняется:

$$x + 1 > x^2 - 4 \Longrightarrow x^2 - x - 5 < 0 \Longrightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

С учётом $x > \sqrt{5}$: $\sqrt{5} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Случай 2. $0 < x^2 - 4 < 1$, то есть $2 < x < \sqrt{5}$. Знак меняется:

$$x + 1 < x^2 - 4 \Longrightarrow x^2 - x - 5 > 0 \Longrightarrow x < \frac{1-\sqrt{21}}{2} \text{ или } x > \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

Оба не попадают в интервал.

Ответ: $x \in \left(\sqrt{5}; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

16. Блок J5. Сложные неравенства

Составленные задания

166. $\dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 2} > 0$

167. $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$

168. $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) \le 1$

169. $\log_3(x^2 - 4x + 3) \le \log_3(x+3)$

170. $\log_3(x^2 - 2x) \le \log_3(3x-6)$

171. $\log_2(x^2 - 4x + 3) \ge \log_2(2x-2)$

172. $\log_{0,5}(x^2 - 4x - 5) \ge -4$

173. $\log_3(x^2 - 2x) \le \log_3(x+4)$

174. $\log_2(x^2 - 4x) \ge \log_2(2x-5)$

175. $\log_{0,5}(x^2 - 3x) \ge \log_{0,5}(x+5)$

Решения J5.

№166.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \ne 2 \end{cases} \Longrightarrow x > 0,\ x \ne 4.$$

Замена: $t = \log_2 x$.

Неравенство:

$$\frac{t-1}{t-2} > 0.$$

Нули числителя и знаменателя: $t = 1$, $t = 2$.

Метод интервалов: $t < 1$ или $t > 2$.

Обратная замена:

$$\log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2; \qquad \log_2 x > 2 \Rightarrow x > 4.$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup (4;+\infty)$.

№167.

ОДЗ:

$$x > 0$$

Замена: $t = \log_2 x$.

Неравенство:

$$t^2 - 4t + 3 > 0.$$

Корни: $t = 1$, $t = 3$.

Знак: $t < 1$ или $t > 3$.

Обратная замена:

$$0 < x < 2 \quad \text{или} \quad x > 8.$$

Ответ: $x \in (0;2) \cup (8;+\infty)$.

№168.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 2.$$

Решение:

$$\log_2\big((x-1)(x-2)\big) \le 1 \Longrightarrow (x-1)(x-2) \le 2 \Longrightarrow x^2 - 3x \le 0.$$

$$0 \le x \le 3.$$

Пересечение с ОДЗ: $2 < x \le 3$.
Ответ: $x \in (2;3]$.

№169.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow -3 < x < 1 \text{ или } x > 3.$$

Основание $3 > 1$:

$$x^2 - 4x + 3 \le x + 3 \Longrightarrow x^2 - 5x \le 0 \Longrightarrow 0 \le x \le 5.$$

Пересечение: $[0;1) \cup (3;5]$.
Ответ: $x \in [0;1) \cup (3;5]$.

№170.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 2 \\ x > 2 \end{cases} \Longrightarrow x > 2.$$

Основание $3 > 1$:

$$x^2 - 2x \le 3x - 6 \Longrightarrow x^2 - 5x + 6 \le 0 \Longrightarrow 2 \le x \le 3.$$

Пересечение с ОДЗ: $2 < x \le 3$.
Ответ: $x \in (2;3]$.

№171.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 3 \\ x > 1 \end{cases} \Longrightarrow x > 3.$$

Основание $2 > 1$:

$$x^2 - 4x + 3 \ge 2x - 2 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 \ge 0 \Longrightarrow x \le 1 \text{ или } x \ge 5.$$

Пересечение с ОДЗ: $x \ge 5$.
Ответ: $x \in [5;+\infty)$.

№172.
ОДЗ:

$$x^2 - 4x - 5 > 0 \Longrightarrow x < -1 \text{ или } x > 5.$$

Основание $0{,}5 < 1$ — знак меняется:

$$x^2 - 4x - 5 \le (0{,}5)^{-4} = 16 \Longrightarrow x^2 - 4x - 21 \le 0.$$

Корни: $x = -3$, $x = 7$. Значит, $-3 \le x \le 7$.
Пересечение с ОДЗ: $[-3;-1) \cup (5;7]$.
Ответ: $x \in [-3;-1) \cup (5;7]$.

№173.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > 2 \\ x > -4 \end{cases} \Longrightarrow -4 < x < 0 \text{ или } x > 2.$$

Основание $3 > 1$:

$$x^2 - 2x \le x + 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 \le 0 \Longrightarrow -1 \le x \le 4.$$

Пересечение с ОДЗ: $[-1;0)\cup(2;4]$.
Ответ: $x\in[-1;0)\cup(2;4]$.

№174.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x>0 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Longrightarrow x>4.$$

Основание $2>1$:

$$x^2-4x\geq 2x-5 \Longrightarrow x^2-6x+5\geq 0 \Longrightarrow x\leq 1 \text{ или } x\geq 5.$$

Пересечение с ОДЗ: $x\geq 5$.
Ответ: $x\in[5;+\infty)$.

№175.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Longrightarrow -5<x<0 \text{ или } x>3.$$

Основание $0{,}5<1$ — знак меняется:

$$x^2-3x\leq x+5 \Longrightarrow x^2-4x-5\leq 0 \Longrightarrow -1\leq x\leq 5.$$

Пересечение: $[-1;0)\cup(3;5]$.
Ответ: $x\in[-1;0)\cup(3;5]$.

17. Блок K. Системы уравнений

Составленные задания

176. $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3\\ x+y=6\end{cases}$

177. $\begin{cases}\log_3 x-\log_3 y=1\\ xy=27\end{cases}$

178. $\begin{cases}\log_2(x+y)=3\\ \log_2 x+\log_2 y=2\end{cases}$

179. $\begin{cases}x^{\log_2 y}=8\\ \log_2 x+\log_2 y=4\end{cases}$

180. $\begin{cases}2^{\log_2 x}+\log_2 y=5\\ xy=16\end{cases}$

181. $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1\\ x^2+y^2=26\end{cases}$

182. $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=2\\ x-2y=4\end{cases}$

183. $\begin{cases}\log_3(xy)=2\\ \log_3 \frac{x}{y}=0\end{cases}$

184. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=2\\ xy=8\end{cases}$

185. $\begin{cases}\log_6 x+\log_6 y=2\\ x-y=5\end{cases}$

Решения K.

№176.

ОДЗ:

$$\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\log_2(xy)=3 \Longrightarrow xy=8.$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases}xy=8\\ x+y=6\end{cases}$$

По теореме Виета x, y — корни $t^2-6t+8=0 \Rightarrow t=2$ или $t=4$.

Ответ: $(2;4)$, $(4;2)$.

№177.

ОДЗ:

$$\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\log_3 \frac{x}{y} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{y} = 3 \Longrightarrow x = 3y.$$

Подставляем во второе:

$$3y \cdot y = 27 \Longrightarrow y^2 = 9 \Longrightarrow y = 3.$$

Тогда $x = 9$.
Ответ: $(9; 3)$.

№178.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из первого: $x + y = 8$. Из второго: $\log_2(xy) = 2 \Rightarrow xy = 4$.
По теореме Виета: $t^2 - 8t + 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \pm 2\sqrt{3}$.
Ответ: $(4 + 2\sqrt{3};\ 4 - 2\sqrt{3})$, $(4 - 2\sqrt{3};\ 4 + 2\sqrt{3})$.

№179.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Обозначим $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$.
Второе уравнение: $u + v = 4$.
Первое уравнение логарифмируем по 2:

$$\log_2 y \cdot \log_2 x = 3 \Longrightarrow uv = 3.$$

По теореме Виета u, v — корни $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$ или $t = 3$.
Значит, $(u, v) = (1; 3)$ или $(3; 1)$.
Тогда $(x, y) = (2; 8)$ или $(8; 2)$.
Ответ: $(2; 8)$, $(8; 2)$.

№180.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из второго: $xy = 16 \Rightarrow y = 16/x$. Подставляем в первое:

$$x + \log_2 \frac{16}{x} = 5 \Longrightarrow x + 4 - \log_2 x = 5 \Longrightarrow x - 1 = \log_2 x.$$

У уравнения $x - 1 = \log_2 x$ два корня, $x = 1$ и $x = 2$. Тогда $y = 16$ и $y = 8$.
Ответ: $(1; 16)$, $(2; 8)$.

№181.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из первого: $xy = 5$. Из второго: $x^2 + y^2 = 26$. Тогда

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 26 + 10 = 36 \Longrightarrow x + y = 6.$$

По Виета: $t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1$ или $t = 5$.
Ответ: $(1; 5)$, $(5; 1)$.

№182.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из первого: $\log_2 \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y$. Подставляем во второе:

$$4y - 2y = 4 \Longrightarrow y = 2.$$

Тогда $x = 8$.
Ответ: $(8; 2)$.

№183.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из первого: $xy = 9$. Из второго: $\log_3 \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$. Тогда

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = y = 3.$$

Ответ: $(3; 3)$.

№184.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из второго: $xy = 8 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 y = 3$.
Обозначим $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u + \frac{v}{2} = 2 \end{cases}$$

Умножаем второе на 2: $2u + v = 4$. Вычитаем первое: $u = 1$. Тогда $v = 2$.
Значит, $x = 2$, $y = 4$.
Ответ: $(2; 4)$.

№185.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Из первого: $xy = 36$. Из второго: $x - y = 5 \Rightarrow y = x - 5$. Подставляем:

$$x(x - 5) = 36 \Longrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Longrightarrow x = 9 \text{ или } x = -4.$$

По ОДЗ $x = 9$, $y = 4$.
Ответ: $(9; 4)$.

18. Блок L. Показательно-логарифмические уравнения

Составленные задания

186. $2^{\log_2 x} \cdot x^{\log_2 x} = 64$

187. $x^{2\log_2 x} = 64 \cdot x$

188. $3^{\log_3 x} = x^2 - 6x + 9$

189. $5^{2\log_5 x} = x + 12$

190. $x^{\log_2 x} = 2^2 \cdot x^{-1}$

191. $x^{\log_5 x} = 5^2 \cdot x$

192. $7^{\log_7 x} = x^2 - 12$

193. $2^{2\log_2 x} = x + 6$

194. $x^{\log_3 x} = 27 \cdot x^{-2}$

195. $10^{\log_{10} x} = x^2 - 20$

Решения L.

№186.

ОДЗ:

$$x > 0$$

По тождеству $2^{\log_2 x} = x$:

$$x \cdot x^{\log_2 x} = 64 \Longrightarrow x^{1+\log_2 x} = 64.$$

Логарифмируем по 2:

$$(1 + \log_2 x) \cdot \log_2 x = 6.$$

Замена $t = \log_2 x$:

$$(1 + t) \cdot t = 6 \Longrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Longrightarrow t = 2 \text{ или } t = -3.$$

Обратная замена: $x = 4$ или $x = 2^{-3} = 1/8$.

Ответ: 4 и $1/8$.

№187.

ОДЗ:

$$x > 0$$

Логарифмируем обе части по 2. Пусть $t = \log_2 x$:

$$2t^2 = \log_2 64 + t \Longrightarrow 2t^2 = 6 + t \Longrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0.$$

Корни: $t = 2$, $t = -\dfrac{3}{2}$.

Обратная замена: $x = 4$ или $x = 2^{-3/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: 4 и $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

№188.

ОДЗ:

$$x > 0$$

По тождеству $3^{\log_3 x} = x$, значит:

$$x = x^2 - 6x + 9 \Longrightarrow x^2 - 7x + 9 = 0.$$

Корни: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ и $\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

№189.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$5^{2\log_5 x} = x^2$. Уравнение:

$$x^2 = x + 12 \Longrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ или } x = -3.$$

По ОДЗ $x = 4$.

Ответ: 4.

№190.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$x^{\log_2 x} \cdot x = 4 \Longrightarrow x^{1+\log_2 x} = 4$.

Логарифмируем по 2:

$$(1+t)t = 2 \Longrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Longrightarrow t = 1 \text{ или } t = -2.$$

Тогда $x = 2$ или $x = 1/4$.

Ответ: 2 и 1/4.

№191.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$x^{\log_5 x} = 25x \Longrightarrow x^{\log_5 x - 1} = 25$.

Логарифмируем по 5:

$$(\log_5 x - 1)\log_5 x = 2.$$

Замена $t = \log_5 x$:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Longrightarrow t = 2 \text{ или } t = -1.$$

Тогда $x = 25$ или $x = 1/5$.

Ответ: 25 и 1/5.

№192.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$7^{\log_7 x} = x$. Уравнение:

$$x = x^2 - 12 \Longrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ или } x = -3.$$

По ОДЗ $x = 4$.

Ответ: 4.

№193.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$2^{2\log_2 x} = x^2$. Уравнение:

$$x^2 = x + 6 \Longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ или } x = -2.$$

По ОДЗ $x = 3$.

Ответ: 3.

№194.
ОДЗ:

$$x > 0$$

$x^{\log_3 x} = 27x^{-2} \Longrightarrow x^{\log_3 x+2} = 27.$
Логарифмируем по 3:

$$(t+2)t = 3 \Longrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 1 \text{ или } t = -3.$$

Тогда $x = 3$ или $x = 1/27$.
Ответ: 3 и $1/27$.

№195.
ОДЗ:

$$x > 0$$

$10^{\log_{10} x} = x$. Уравнение:

$$x = x^2 - 20 \Longrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Longrightarrow x = 5 \text{ или } x = -4.$$

По ОДЗ $x = 5$.
Ответ: 5.

19. Блок М. Отбор корней с тригонометрией

Составленные задания

196. $\log_2(2\sin x)+\log_2(\cos x)=-1$ на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

197. $\log_3(\sin x)+\log_3(\cos x)=-1$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

198. $\log_2(\sin 2x)=1$ на $[0;\pi]$

199. $2\log_2(\cos x)+\log_2(1-\cos 2x)=0$ на $[-\pi;0]$

200. $\log_5(\tan x)=0$ на $[0;2\pi]$

201. $\log_2(\sin x)=-\frac{1}{2}$ на $[0;2\pi]$

202. $\log_2(\cos 2x)=0$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

203. $\log_3(\sin 2x)=1$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

204. $\log_2(\tan x)+1=0$ на $[-\pi;\pi]$

205. $\log_2(2\cos x)=1$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Решения М.

№196.

ОДЗ:

$$\begin{cases}2\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$$

На отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\cos x\le 0$ — ОДЗ не выполнено.

Ответ: нет решений.

№197.

ОДЗ:

$$\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$$

Тогда:

$$\log_3(\sin x\cos x)=-1\Longrightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{3}\Longrightarrow \sin 2x=\frac{2}{3}.$$

На $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $x_1=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

№198.

ОДЗ: $\sin 2x>0$.

Уравнение: $\sin 2x=2$ — нет решений ($\sin\le 1$).

Ответ: нет решений.

№199.

ОДЗ:

$$\begin{cases}\cos x>0\\ 1-\cos 2x>0\end{cases}$$

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$, поэтому:

$$\cos^2 x\cdot 2\sin^2 x=1\Longrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x=1\Longrightarrow \sin^2 2x=2.$$

Нет решений.
Ответ: нет решений.

№200.
ОДЗ: $\tan x > 0$.
Уравнение: $\tan x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$.
На $[0; 2\pi]$: $x = \dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4}$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$.

№201.
ОДЗ: $\sin x > 0$.
Уравнение: $\sin x = 2^{-1/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
На $[0; 2\pi]$: $x = \dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{4}$.
Ответ: $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$.

№202.
ОДЗ: $\cos 2x > 0$.
Уравнение: $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2\pi k \Rightarrow x = \pi k$.
На $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$: $x = 0$.
Ответ: 0.

№203.
ОДЗ: $\sin 2x > 0$.
Уравнение: $\sin 2x = 3$ — нет решений.
Ответ: нет решений.

№204.
ОДЗ: $\tan x > 0$.
Уравнение: $\tan x = \dfrac{1}{2}$.
На $[-\pi; \pi]$: $x = \arctan \dfrac{1}{2};\ \arctan \dfrac{1}{2} - \pi$.
Ответ: $\arctan \dfrac{1}{2},\ \arctan \dfrac{1}{2} - \pi$.

№205.
ОДЗ: $\cos x > 0$.
Уравнение: $2\cos x = 2 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$.
На $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$: $x = 0$.
Ответ: 0.

20. Блок N. Показательно-логарифмические неравенства

Составленные задания

206. $2^{2\log_2 x} > 3 \cdot 2^{\log_2 x} + 4$

207. $3^{\log_3 x} < x + 2$

208. $\dfrac{1}{\log_2 x} < \log_2 x$

209. $\log_2 x \cdot \log_3 x > \log_2 3$

210. $x^{\log_2 x} > 8$

211. $5^{\log_5 x} \geq x^2 - 6$

212. $x^{\log_3 x} > 27$

213. $\log_2 x \cdot \log_5 x < 2\log_2 5$

214. $7^{\log_7 x} < x^2 - 6$

215. $x^{\log_5 x} < 25$

Решения N.

№206.

ОДЗ:

$$x > 0$$

По тождеству $2^{\log_2 x} = x$, значит $2^{2\log_2 x} = x^2$. Неравенство:

$$x^2 > 3x + 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Корни: $x = -1$, $x = 4$. Знак «>»: $x < -1$ или $x > 4$. По ОДЗ $x > 4$.

Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

№207.

ОДЗ:

$$x > 0$$

$3^{\log_3 x} = x$, поэтому неравенство принимает вид:

$$x < x + 2 \text{ — верно для всех } x > 0.$$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

№208.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x > 0,\ x \neq 1.$$

Замена: $t = \log_2 x$. Неравенство:

$$\frac{1}{t} < t \Longrightarrow \frac{1 - t^2}{t} < 0.$$

Нули: $t = -1$, 0, 1. Метод интервалов: $t \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
Обратная замена: $x \in (1/2; 1) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: $x \in (1/2; 1) \cup (2; +\infty)$.

№209.

ОДЗ:

$$x > 0$$

Обозначим $u = \log_2 x$, тогда $\log_3 x = \dfrac{u}{\log_2 3}$. Неравенство:

$$u \cdot \frac{u}{\log_2 3} > \log_2 3 \Longrightarrow u^2 > (\log_2 3)^2 \Longrightarrow |u| > \log_2 3.$$

Значит, $\log_2 x > \log_2 3$ или $\log_2 x < -\log_2 3$. Тогда $x > 3$ или $0 < x < 1/3$.
Ответ: $x \in (0; 1/3) \cup (3; +\infty)$.

№210.
ОДЗ:

$$x > 0$$

Логарифмируем по 2:

$$(\log_2 x)^2 > 3 \Longrightarrow |\log_2 x| > \sqrt{3}.$$

Тогда $x > 2^{\sqrt{3}}$ или $0 < x < 2^{-\sqrt{3}}$.
Ответ: $x \in (0; 2^{-\sqrt{3}}) \cup (2^{\sqrt{3}}; +\infty)$.

№211.
ОДЗ:

$$x > 0$$

$5^{\log_5 x} = x$. Неравенство:

$$x \geq x^2 - 6 \Longrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

По ОДЗ: $0 < x \leq 3$.
Ответ: $x \in (0; 3]$.

№212.
ОДЗ:

$$x > 0$$

Логарифмируем по 3:

$$(\log_3 x)^2 > 3 \Longrightarrow |\log_3 x| > \sqrt{3}.$$

Тогда $x > 3^{\sqrt{3}}$ или $0 < x < 3^{-\sqrt{3}}$.
Ответ: $x \in (0; 3^{-\sqrt{3}}) \cup (3^{\sqrt{3}}; +\infty)$.

№213.
ОДЗ:

$$x > 0$$

$u = \log_2 x$; $\log_5 x = \dfrac{u}{\log_2 5}$. Неравенство:

$$u \cdot \frac{u}{\log_2 5} < 2\log_2 5 \Longrightarrow u^2 < 2(\log_2 5)^2.$$

Значит, $|u| < \sqrt{2}\log_2 5$, то есть $5^{-\sqrt{2}} < x < 5^{\sqrt{2}}$.
Ответ: $x \in (5^{-\sqrt{2}}; 5^{\sqrt{2}})$.

№214.
ОДЗ:

$$x > 0$$

$7^{\log_7 x} = x$. Неравенство:

$$x < x^2 - 6 \Longrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Longrightarrow x < -2 \text{ или } x > 3.$$

По ОДЗ: $x > 3$.
Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

№215.
ОДЗ:

$$x > 0$$

Логарифмируем по 5:

$$(\log_5 x)^2 < 2 \Longrightarrow |\log_5 x| < \sqrt{2}.$$

Тогда $5^{-\sqrt{2}} < x < 5^{\sqrt{2}}$.
Ответ: $x \in (5^{-\sqrt{2}}; 5^{\sqrt{2}})$.

21. Блок О. Минимум с параметром

Составленные задания

216. При каких a уравнение $\log_2(x^2-2x+a)=2$ имеет корни?

217. При каких a уравнение $\log_a(x+3)=\log_a(2x-5)$ имеет решение?

218. При каких a неравенство $\log_a(x^2+1)>1$ выполнено для всех x?

219. При каких a уравнение $\log_2^2 x-2\log_2 x+a=0$ имеет ровно один корень?

220. При каких a уравнение $\log_3^2 x-3\log_3 x+a=0$ имеет два различных корня?

Решения О.

№216.

ОДЗ:

$$x^2-2x+a>0$$

Уравнение равносильно:

$$x^2-2x+a=4 \Longrightarrow x^2-2x+(a-4)=0.$$

Дискриминант:

$$D=4-4(a-4)\geq 0 \Longrightarrow a\leq 5.$$

При таких a найденные корни удовлетворяют ОДЗ (аргумент равен 4).

Ответ: $a\leq 5$.

№217.

ОДЗ:

$$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ x+3>0 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Longrightarrow x>2{,}5.$$

Уравнение:

$$x+3=2x-5 \Longrightarrow x=8.$$

При $x=8$: $x+3=11$, $2x-5=11$ — равенство верно при любом допустимом a.

Ответ: $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

№218.

При $a>1$ нужно $x^2+1>a$ для всех x. Минимум x^2+1 равен 1, значит нужно $a<1$ — противоречие с $a>1$.

При $0<a<1$ нужно $x^2+1<a$ для всех x, что невозможно, так как $x^2+1\geq 1$.

Ответ: таких a нет.

№219.

ОДЗ:

$$x>0$$

Замена $t=\log_2 x$:

$$t^2-2t+a=0.$$

Ровно один корень x равносильно ровно одному корню t (кратному):

$$D=4-4a=0 \Longrightarrow a=1.$$

Ответ: $a=1$.

№220.

ОДЗ:

$$x > 0$$

Замена $t = \log_3 x$:

$$t^2 - 3t + a = 0.$$

Два различных корня t:

$$D = 9 - 4a > 0 \Longrightarrow a < \frac{9}{4}.$$

Ответ: $a < \frac{9}{4}$.

Как пользоваться

1. Сначала разберите рамки «Задания в формате ЕГЭ» в каждом блоке — так задания выглядят на экзамене. Задания №32–37 взяты из открытого банка ФИПИ, рядом указан код задания.
2. Затем решайте составленные задания блоков по порядку — для закрепления.
3. Через неделю вернитесь и решите подряд 15 случайных номеров.