Методичка к задачнику по логарифмам

Ответы · Алгоритмы · Ошибки · ОДЗ · Тренажёр

Содержание

1 Лист ответов . . . 2
Часть 1. Блоки A–E (№1–70) . . . 2
Часть 2. Блоки F–I (№71–125) . . . 3
Часть 3. Блок J (№126–175) . . . 4
Часть 4. Блоки K–O (№176–220) . . . 5
2 Алгоритмы решения . . . 6
2.1 Как решать $\log_a f(x) = b$ . . . 6
2.2 Как решать $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ . . . 6
2.3 Как решать $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$ . . . 6
2.4 Как решать $\log_a^2 x - b\log_a x + c = 0$ . . . 6
2.5 Как решать $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ . . . 7
2.6 Метод рационализации . . . 7
2.7 Как решать $x^{\log_a x} = b$ . . . 7
2.8 Как решать систему с логарифмами . . . 7
3 Типичные ошибки . . . 8
3.1 Ошибка 1. Логарифм суммы . . . 8
3.2 Ошибка 2. Вынос степени . . . 8
3.3 Ошибка 3. Умножение на логарифм . . . 8
3.4 Ошибка 4. Забытое ОДЗ . . . 8
3.5 Ошибка 5. Основание $0 < a < 1$ . . . 8
3.6 Ошибка 6. $\log_a a \neq 0$ . . . 8
3.7 Ошибка 7. Переход к новому основанию . . . 9
4 Карточки ОДЗ . . . 10
5 Тренажёр «на скорость» (30 заданий) . . . 11
Ответы к тренажёру . . . 11
Как пользоваться методичкой . . . 12

1. Лист ответов

Часть 1. Блоки A–E (№1–70)

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1	5	2	4	3	2
4	2	5	2	6	4
7	5	8	2	9	2
10	1	11	2	12	7
13	4	14	3	15	3
16	3	17	2	18	2
19	12	20	4	21	3
22	2	23	9	24	5
25	3	26	3	27	5
28	8	29	4	30	16
31	3	32	68	33	−4
34	6	35	8	36	12
37	13	38	4	39	27
40	3	41	нет	42	5
43	7	44	4	45	8
46	2; 4	47	3; 27	48	$\sqrt{2}$; 4
49	1/125; 25	50	2; 8	51	3; 9
52	1/7; 343	53	4; 32	54	1/4; 16
55	1/6; 216	56	5; 125	57	8; 32
58	4; 1/4	59	9; 1/9	60	4
61	4	62	3,5	63	4
64	3; 1/3	65	4; 1/4	66	9
67	5	68	3	69	5/3
70	25; 1/25				

Часть 2. Блоки F–I (№71–125)

№	Ответ	№	Ответ
71	$(3;+\infty)$	72	$(-\infty;3{,}5)$
73	$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	74	$(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$
75	$(2;3)\cup(3;+\infty)$	76	$(3;+\infty)$
77	$(0{,}5;1)\cup(1;+\infty)$	78	$(2;\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};+\infty)$
79	$(1;5)$	80	$(4;+\infty)$
81	$(1;2)\cup(2;+\infty)$	82	$[3;+\infty)$
83	$(-3;-2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$	84	$(-\infty;-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{10};-3)\cup(3;\sqrt{10})\cup(\sqrt{10};+\infty)$
85	$(1;2)\cup(2;+\infty)$	86	5
87	7	88	4
89	5	90	нет решений
91	нет решений	92	нет решений
93	5	94	6
95	нет решений	96	4
97	3	98	нет решений
99	4	100	6
101	а) $\sqrt{2}$; 16б) $\sqrt{2}$; 16	102	а) 3; 243б) 3; 243
103	а) 1/2; 16б) 1/2; 16	104	а) 3б) 3
105	а) 1б) 1	106	а) 1/2; 2б) 1/2; 2
107	а) 1/3; 3б) 1/3; 3	108	а) 6б) 6
109	а) 4б) 4	110	а) 5б) 5
111	а) 2; 8б) 2; 8	112	а) 2б) 2
113	а) 16; 32б) 16; 32	114	а) 25; 125б) 25; 125
115	а) 1/3; 27б) 1/3; 27	116	а) $\pm\pi/4+2\pi n$б) $-7\pi/4$
117	а) 2; $2\sqrt{2}$б) 2	118	а) 6б) 6
119	а) -4б) -4	120	а) $\sqrt[3]{2}$; 4б) $\sqrt[3]{2}$; 4
121	а) 5б) 5	122	а) 2; 16б) 2; 16
123	а) 5б) 5	124	а) 6б) 6
125	а) 16; 64б) 16; 64		

Часть 3. Блок J (№126–175)

№	Ответ	№	Ответ
126	$(2;3)$	127	$(3;1+\sqrt{13}]$
128	нет решений	129	$(1;5]$
130	$(2;\sqrt{7}]$	131	$(1;2]$
132	$[7;+\infty)$	133	$[-1+\sqrt{14};+\infty)$
134	$(1;+\infty)$	135	$(1;-2+3\sqrt{5}]$
136	$(0;2)\cup(16;+\infty)$	137	$[9;27]$
138	$[\sqrt{2};4]$	139	$(0;\frac{1}{25}]\cup[625;+\infty)$
140	$(4;8)$	141	$(0;\frac{1}{3})\cup(81;+\infty)$
142	$(4;16)$	143	$[6;36]$
144	$(0;4]\cup[16;+\infty)$	145	$(0;\sqrt[3]{2})\cup(4;+\infty)$
146	$(1;+\infty)$	147	$(-\infty;-3)$
148	$(3;4]$	149	$[5;+\infty)$
150	$[-1;0)\cup(3;5]$	151	$[\frac{5-\sqrt{29}}{2};0)\cup(4;\frac{5+\sqrt{29}}{2}]$
152	$[5;+\infty)$	153	$[2-\sqrt{17};-1)\cup(5;2+\sqrt{17}]$
154	$[0;1)\cup(3;5]$	155	$(5;\frac{7+\sqrt{17}}{2}]$
156	$(1;2)\cup(3;+\infty)$	157	$(-1;1]$
158	$(1;5)$	159	$(2;+\infty)$
160	$(0{,}5;1)\cup[3;+\infty)$	161	$(3;+\infty)$
162	$(\frac{2}{3};1)\cup[1{,}5;+\infty)$	163	$(1;+\infty)$
164	$(2;4]$	165	$(\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{21}}{2})$
166	$(0;2)\cup(4;+\infty)$	167	$(0;2)\cup(8;+\infty)$
168	$(2;3]$	169	$[0;1)\cup(3;5]$
170	$(2;3]$	171	$[5;+\infty)$
172	$[-3;-1)\cup(5;7]$	173	$[-1;0)\cup(2;4]$
174	$[5;+\infty)$	175	$[-1;0)\cup(3;5]$

Часть 4. Блоки К–О (№176–220)

№	Ответ	№	Ответ
176	$(2;4)$, $(4;2)$	177	$(9;3)$
178	$(4\pm2\sqrt{3};\ 4\mp2\sqrt{3})$	179	$(2;8)$, $(8;2)$
180	$(1;16)$, $(2;8)$	181	$(1;5)$, $(5;1)$
182	$(8;2)$	183	$(3;3)$
184	$(2;4)$	185	$(9;4)$
186	$4;\ 1/8$	187	$4;\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
188	$\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$	189	4
190	$2;\ 1/4$	191	$25;\ 1/5$
192	4	193	3
194	$3;\ 1/27$	195	5
196	нет решений	197	$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}$
198	нет решений	199	нет решений
200	$\pi/4,\ 5\pi/4$	201	$\pi/4,\ 3\pi/4$
202	0	203	нет решений
204	$\arctan\dfrac{1}{2},\ \arctan\dfrac{1}{2}-\pi$	205	0
206	$(4;+\infty)$	207	$(0;+\infty)$
208	$\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$	209	$\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$
210	$(0;2^{-\sqrt{3}})\cup(2^{\sqrt{3}};+\infty)$	211	$(0;3]$
212	$(0;3^{-\sqrt{3}})\cup(3^{\sqrt{3}};+\infty)$	213	$(5^{-\sqrt{2}};5^{\sqrt{2}})$
214	$(3;+\infty)$	215	$(5^{-\sqrt{2}};5^{\sqrt{2}})$
216	$a\le5$	217	$a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$
218	нет таких a	219	$a=1$
220	$a<\dfrac{9}{4}$		

2. Алгоритмы решения

2.1. Как решать $\log_a f(x) = b$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
2. Перейти к: $f(x) = a^b$.
3. Решить уравнение.
4. Проверить корни по ОДЗ.

2.2. Как решать $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
2. Приравнять: $f(x) = g(x)$.
3. Решить уравнение.
4. Отобрать корни, удовлетворяющие ОДЗ.

2.3. Как решать $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
2. Объединить: $\log_a\big(f(x) \cdot g(x)\big) = b$.
3. Перейти к: $f(x) \cdot g(x) = a^b$.
4. Решить, проверить корни.

2.4. Как решать $\log_a^2 x - b\log_a x + c = 0$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $x > 0$.
2. Замена $t = \log_a x$.
3. Решить квадратное уравнение относительно t.
4. Вернуться к x: $x = a^t$.

2.5. Как решать $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
2. Если $a > 1$: $f(x) > g(x)$.
3. Если $0 < a < 1$: $f(x) < g(x)$.
4. Пересечь с ОДЗ.

2.6. Метод рационализации

Алгоритм

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \iff (a-1)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0$$

при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Знак $\vee$ — любой из $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

2.7. Как решать $x^{\log_a x} = b$

Алгоритм

1. **ОДЗ:** $x > 0$.
2. Если $b \leq 0$ или $\log_a b < 0$ — решений нет.
3. Логарифмировать обе части по a: $(\log_a x)^2 = \log_a b$.
4. Решить: $\log_a x = \pm\sqrt{\log_a b}$.
5. Найти x.

2.8. Как решать систему с логарифмами

Алгоритм

1. Выписать ОДЗ для **каждого** логарифма.
2. Использовать свойства логарифмов, чтобы свести к алгебраической системе.
3. Решить систему.
4. Отобрать решения по ОДЗ.

3. Типичные ошибки

3.1. Ошибка 1. Логарифм суммы

НЕЛЬЗЯ:

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y.$$

Можно:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

3.2. Ошибка 2. Вынос степени

НЕЛЬЗЯ: выносить степень, если аргумент может быть отрицательным:

$$\log_2 x^4 = 4\log_2 x \quad \text{— только при } x > 0.$$

Правильно:

$$\log_2 x^4 = 4\log_2 |x|.$$

3.3. Ошибка 3. Умножение на логарифм

НЕЛЬЗЯ: умножать на $\log_a x$, не проверив его знак.

$$\frac{1}{\log_2 x} < \log_2 x \quad \text{— нельзя «умножить на } \log_2 x\text{».}$$

Правильно: перенести всё в одну сторону и решать методом интервалов с заменой $t = \log_2 x$.

3.4. Ошибка 4. Забытое ОДЗ

НЕЛЬЗЯ: решать $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ как $f(x) = g(x)$ без ОДЗ.

Пример: $\log_2(x^2 - 4x) = \log_2(2x - 8)$. Приравнивание даёт $x = 2$ или $x = 4$. Но ОДЗ требует $x > 4$, значит **посторонние** оба корня: при $x = 2$ оба аргумента равны -4, при $x = 4$ — нулю. Решений нет.

3.5. Ошибка 5. Основание $0 < a < 1$

НЕЛЬЗЯ: забывать менять знак при основании < 1.
$\log_{0,5} x > 2 \Rightarrow 0 < x < 0{,}25$, а не $x > 0{,}25$.

3.6. Ошибка 6. $\log_a a \neq 0$

Правильно: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$. Не путать.

3.7. Ошибка 7. Переход к новому основанию

Правильно:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

НЕЛЬЗЯ путать числитель и знаменатель.

4. Карточки ОДЗ

Выражение	ОДЗ
$\log_2(x-3)$	$x > 3$
$\log_5(7-2x)$	$x < 3{,}5$
$\log_3(x^2-4)$	$x < -2$ или $x > 2$
$\log_4(x^2-5x+6)$	$x < 2$ или $x > 3$
$\log_{x-2} 5$	$x > 2,\ x \neq 3$
$\log_{x+1}(x-3)$	$x > 3$
$\log_{2x-1}(x+4)$	$x > 0{,}5,\ x \neq 1$
$\log_{x^2-4}(x+1)$	$x > 2,\ x \neq \sqrt{5}$
$\log_2(x-1) + \log_2(5-x)$	$1 < x < 5$
$\log_3(x+2) - \log_3(x-4)$	$x > 4$
$\dfrac{1}{\log_2(x-1)}$	$x > 1,\ x \neq 2$
$\sqrt{\log_3(x-2)}$	$x \geq 3$
$\log_{\lvert x\rvert-2}(x+3)$	$x \in (-3;-2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$
$\log_{x^2-9}(x^2-5x+6)$	$x < -3$ или $x > 3,\ x \neq \pm\sqrt{10}$
$\log_2(x-1) + \log_{x-1} 2$	$x > 1,\ x \neq 2$
$\log_a(x^2+1)$	$x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$
$\log_{2-x}(x+3)$	$-3 < x < 2,\ x \neq 1$
$\log_{x-3}(x^2-9)$	$x > 3,\ x \neq 4$
$\log_{\sqrt{x-1}}(x+5)$	$x > 1,\ x \neq 2$
$\log_x(x^2-1)$	$x > 1$

5. Тренажёр «на скорость» (30 заданий)

Тренажёр

Решите за 40 минут. Ответы — ниже.

1. $\log_2 32$
2. $\log_3 81$
3. $\log_5 125$
4. $\log_2 \frac{1}{8}$
5. $\log_7 1$
6. $\log_4 8$
7. $\log_9 27$
8. $2^{\log_2 9}$
9. $5^{\log_5 3}$
10. $\log_2 6 + \log_2 \frac{4}{3}$
11. $\log_3 45 - \log_3 5$
12. $\log_2 5 \cdot \log_5 8$
13. $\frac{\log_7 49}{\log_7 7}$
14. $\log_2 x = 5$
15. $\log_3 x = -2$
16. $\log_5(x-2) = 1$
17. $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$
18. $\log_3(x-1) = \log_3 5$
19. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$
20. $2\log_2^2 x - 5\log_2 x + 2 = 0$
21. $\log_5^2 x + \log_5 x - 6 = 0$
22. $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) \le 1$
23. $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 > 0$
24. $\log_3(x^2 - 4x + 3) \le \log_3(x-1)$
25. $\log_{x-1} 4 < 2$
26. $x^{\log_2 x} = 16$
27. $\log_x 8 = \frac{3}{2}$
28. $\log_5(2x-1) \le 1$
29. $\log_{0{,}5}(x-3) > -2$
30. $\log_2(x^2 - 4x) > 3$

Ответы к тренажёру

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1	5	2	4	3	3
4	-3	5	0	6	1,5
7	1,5	8	9	9	3
10	3	11	2	12	3
13	2	14	32	15	1/9
16	7	17	3	18	6
19	2; 4	20	$\sqrt{2}$; 4	21	1/125; 25
22	$(2;3]$	23	$(0;2) \cup (8;+\infty)$	24	$(3;4]$
25	$(1;2) \cup (3;+\infty)$	26	4; 1/4	27	4
28	$(0{,}5;3]$	29	$(3;7)$	30	$(-\infty; 2-2\sqrt{3}) \cup (2+2\sqrt{3}; +\infty)$

Как пользоваться методичкой

1. **Перед решением** — прочитать алгоритмы (раздел 2).
2. **Перед проверкой** — сверить с листом ответов (раздел 1).
3. **Если ошибся** — посмотреть типичные ошибки (раздел 3).
4. **Если забыл ОДЗ** — открыть карточки (раздел 4).
5. **За неделю до экзамена** — пройти тренажёр (раздел 5).